LEHRBUCH DER FUNKTIONENTHEORIE

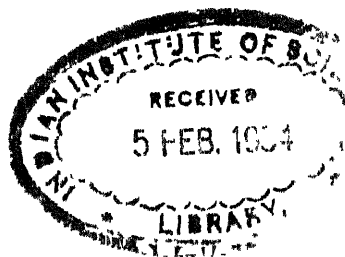
VON

DR. LUDWIG BIEBERBACH
O.Ö. PROF. AN DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT IN BERLIN
MITGLIED DER PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

BAND I

ELEMENTE DER FUNKTIONENTHEORIE

DRITTE VERBESSERTE AUFLAGE

MIT 80 FIGUREN IM TEXT

1930
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN

Vorwort.

Was ist ein Lehrbuch? Es soll, so meine ich, eine vollständige, faßliche und einheitliche Darstellung eines Wissensgebietes geben. Diese drei Eigenschaften „vollständig, faßlich, einheitlich“ bedürfen aber noch der näheren Bestimmung. Vollständig soll ja auch ein Handbuch sein. Aber in anderem Sinne. Das Handbuch soll über jede Einzelheit Auskunft geben. Das Lehrbuch will den Leser instandsetzen, jede ihm außerhalb des Buches selbst begegnende Einzelheit in ihrer Bedeutung für das Ganze zu würdigen. Es soll ihn daher vollständig über die wesentlichen Züge der Theorie aufklären und sie ihn verstehen lehren. In diesem Sinne soll es nach Ergebnissen und Methoden vollständig sein. Dabei soll es faßlich sein, also möglichst wenig Vorkenntnisse voraussetzen. Darunter verstehe ich sowohl spezifische Kenntnisse an Sätzen und Methoden als auch allgemeine Geisteseinstellung oder Übung im mathematisch-wissenschaftlichen Denken. Ich sehe die Aufgabe eines Lehrbuches darin, auch in dieser allgemeinen Weise über den speziellen Stoff hinaus den Leser zu bilden. Wissenschaftlich denken lernt man erst durch Beschäftigung mit der Wissenschaft. Endlich war Einheitlichkeit der Darstellung verlangt. Widerspricht diese Forderung aber nicht gerade in der Funktionentheorie der Vollständigkeit? Wer einmal von dem alten Schlachtruf: Hie Riemann, hie Weierstraß und gar hie Cauchy gehört hat, wird da seine Zweifel haben. Aber in der Wissenschaft hat man in dem Ausgleich der Gegensätze einen Fortschritt zu erblicken Und mitten in einer solchen Periode des Fortschrittes stehen wir eben. So will denn auch dies Buch an seinem Teil zum Ausgleich der Gegensätze, zur Vereinheitlichung der Funktionentheorie beitragen. Der erste Band behandelt die Elemente der Theorie, d. h. die allgemeinen Begriffsbildungen und die einfachen Sätze aus der Funktionentheorie, die bei dem heutigen Stand dieser Wissenschaft allenthalben auf Schritt und Tritt gebraucht werden. Der zweite Band weist in einer Reihe von Kapiteln auf, wieviel herrliche Wohnungen das hier in diesem ersten Band im Grundriß vorgeführte Gebäude in sich zu bergen vermag. Der Leserkreis, an den ich mich wende, und den ich durch dies Buch fördern möchte, ist derselbe, vor dem ich schon so oft über dies schöne Gebiet

vorgetragen habe: der deutsche Student vom dritten Semester an. Ich setze also lediglich die Elemente der analytischen Geometrie voraus in dem Ausmaß, in dem sie die Schule vermittelt, und einige Kenntnisse aus der Differential- und Integralrechnung. Dabei ist aber nicht einmal so viel notig, als mein Leitfaden bietet. Was Geisteseinstellung anlangt, so nehme ich nur an, daß der Leser sich mit williger Freude an das Buch heranmache, und hoffe, daß ihm diese im Laufe der Arbeit nicht abhanden kommt, sondern daß sie wächst und zunimmt.

Von den vielen anderen Lehrbuchern der Funktionentheorie unterscheidet sich meines wohl hauptsachlich darin, daß Anleihen an anderen Gebieten vermieden werden, daß standig im Gebiete der komplexen Zahlen und ihrer analytischen Funktionen gearbeitet wird.

Berlin, im Januar 1930.

L. Bieberbach.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Dieses Buch beschaftigt sich mit den Funktionen einer komplexen Variablen $z = x + iy$. Unter i ist dabei wie ublich die $\sqrt{-1}$ verstanden. x und y sind reelle Veränderliche. Wie kommt es, so wird sich mancher Leser fragen, daß man sich mit den Funktionen eines komplexen Argumentes naher befaßt, ja, besonderes Gewicht auf sie legt? Das ist in der Bedeutung dieser Dinge fur viele Anwendungsgebiete, wie die theoretische Physik, insbesondere die Hydrodynamik, ferner darin begrundet, daß man solchen Funktionen auf Schritt und Tritt in fast allen Zweigen der reinen Mathematik begegnet. Wollten wir gleich die Bedeutung fur die Anwendungen im einzelnen darlegen und so unserer Beschäftigung mit der Funktionentheorie noch einen anderen Grund geben, so mußten wir schon ein gewisses Maß von Kenntnissen aus diesem Gebiet voraussetzen. Auch mochte ich den Leser nicht glauben machen, daß ich den Wert eines mathematischen Wissensgebietes nur in seiner Anwendbarkeit suchte. Wir wollen daher jetzt lieber an einigen einfachen Beispielen aus der reinen Mathematik Nutzen und Notwendigkeit des Komplexen aufweisen. Der Leser soll dabei gleichzeitig eine Vorstellung von der seltenen Schonheit bekommen, die der Funktionentheorie innewohnt, und die sie schon fur sich wertvoll macht.

Jeder, der sich nicht nur ganz oberflachlich mit Algebra oder Analysis befaßt hat, ist auf die *komplexen Zahlen* gestoßen. Jedem Leser sind sie bei der Auflosung der quadratischen Gleichungen, bei der Partialbruchzerlegung und bei der Integration der rationalen Funktionen begegnet. Jeder Leser hat wohl schon von der *Eulerschen Formel*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

gehort und die Leichtigkeit schatzen gelernt, mit der sie erlaubt, $\cos nx$ und $\sin nx$ durch die Potenzen von $\cos x$ und $\sin x$ auszudrucken.[1]

1) Nach der Eulerschen Formel wird namlich

$$\cos nx + i \sin nx = e^{inx} = (\cos x + i \sin x)^n$$

Da nun z. B. $\cos nx$ dem Realteil von $(\cos x + i \sin x)^n$ gleich sein muß, so findet man fur ganzes positives n nach dem binomischen Lehrsatz

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \binom{n}{4} \cos^{n-4} x \sin^4 x - + \cdots.$$

Jedem Leser wird sich auch der Eindruck aufgedrängt haben, daß man den komplexen Zahlen nur schwer aus dem Wege gehen kann, ja, daß ihre Verwendung häufig von besonderem Nutzen ist. Aber nicht jeder wird an dies Buch mit der fertigen Überzeugung herantreten, *daß ohne komplexe Zahlen manche Erscheinung unerklärlich ist*, daß vielerorts erst die Heranziehung des Komplexen zur Klarheit führt, daß erst im Komplexen ein geschlossenes Gebiet gewonnen ist, aus welchem die geläufigen Rechenoperationen nicht wieder herausführen, daß die komplexen Zahlen dem menschlichen Schönheitstrieb viele Befriedigung gewähren. Von solchen Überzeugungen ist dies Buch getragen, und sein erster Wunsch ist es, solche Überzeugungen im Leser zu wecken, damit er frohen Mutes an die Arbeit herangehe.

Die Ansicht, daß die komplexen Zahlen unvermeidlich seien, wird jedem Leser nahe liegen, welcher von dem sogenannten *casus irreducibilis bei den Gleichungen dritten Grades* gehört hat. Das ist jenes eigentümliche Vorkommnis bei der Auflösung der Gleichungen dritten Grades durch die cardanische oder ähnliche Formeln. Das Vorkommnis tritt gerade bei den Gleichungen ein, welche nur reelle Wurzeln besitzen, und äußert sich darin, daß bei den Auflösungsformeln Quadratwurzeln aus negativen Zahlen schlechterdings unvermeidlich sind. In der Algebra wird dies des näheren bewiesen.[1])

An zweiter Stelle sei der Leser an die folgenden Tatsachen erinnert. Will man den Satz aussprechen können, daß alle linearen Gleichungen mit natürlichen, d. i. ganzzahligen Zahlenkoeffizienten lösbar sind, so ist man genötigt, neben diesen natürlichen Zahlen die negativen Zahlen und die Brüche heranzuziehen. Man ist also zu zwei Erweiterungen des Bereiches der natürlichen Zahlen genötigt. Steigt man dann zur Lösung der quadratischen Gleichungen auf, so wird man wieder zur Einführung zweier neuer Zahlensorten geführt.

Ebenso findet man durch Gleichsetzen der Imaginarteile

$$\sin nx = \binom{n}{1} \cos^{n-1} x \sin x - \binom{n}{3} \cos^{n-3} x \sin^3 x + - \cdots.$$

Aus der Eulerschen Formel findet man ferner leicht, daß $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ und daß $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ ist. So findet man z. B. $\cos^n x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n$. Für ganzes positives n kann man hieraus die Entwicklung von $\cos^n x$ in eine Fouriersche Reihe entnehmen. Der binomische Satz liefert nämlich

$$\cos^n x = \frac{e^{nix} + e^{-nix}}{2^n} + \binom{n}{1} \frac{e^{(n-2)ix} + e^{-(n-2)ix}}{2^n} + \cdots$$
$$= \frac{1}{2^{n-1}} \left(\cos nx + \binom{n}{1} \cos (n-2) x + \cdots\right).$$

1) Vgl. z. B. Weber-Wellstein, Encyklopädie der Elementarmathematik. Bd. I, 4. Aufl., Leipzig 1909, S. 436.

Man muß die irrationalen und die komplexen Zahlen heranziehen. Hat man dies aber restlos getan, so werden alle Gleichungen von beliebig hohem Grade lösbar, ohne daß irgendwann die Einführung weiterer Zahlgebilde nötig wird. Dann gilt ganz von selbst der *Fundamentalsatz der Algebra*, daß jede Gleichung Lösungen besitzt. Wir brachten das schon vorhin zum Ausdruck, indem wir sagten, daß die auszuführenden Rechnungen aus dem mit den komplexen Zahlen gewonnenen Zahlkörper nicht wieder herausführen. Mit ihrer Einführung ist also Abschluß und Abrundung erzielt.

Lehrreich ist endlich die Betrachtung der *Logarithmen negativer Zahlen.* Eigentümlich muten uns die Widersprüche an, welche so berühmte Mathematiker wie Johann Bernoulli, der Vater der Variationsrechnung, und so universelle Gelehrte wie Leibniz, einer der Erfinder der Differential- und Integralrechnung und der Vater vieler noch heute üblichen Bezeichnungen, bei der Betrachtung der Logarithmen negativer Zahlen zu finden meinten. Von der Bedeutung des Komplexen legt um so beredteres Zeugnis die Aufklärung dieser Paradoxien durch Euler ab. Der Leser kennt die Formel

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{1}{2i} \log \frac{i-x}{i+x}$$

Daraus folgt $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{2i} \log \frac{i-1}{i+1} = \frac{1}{4i} \log \left(\frac{i-1}{i+1}\right)^2 = \frac{1}{4i} \log(-1)$

Andererseits aber ist $\log(-1) = \frac{1}{2} \log(-1)^2 = \frac{1}{2} \log 1 = 0.$

Also wäre auch $\pi = 0$. Diesen Widerspruch klärte Euler[1]) durch die konsequente Auffassung des Logarithmus als Umkehrungsfunktion der Exponentialfunktion auf. Damit wird der Logarithmus im komplexen Gebiet ganz von selbst eine unendlich vieldeutige Funktion, und das löst das Rätsel. Denn man meint oben bald diesen und bald jenen der Werte, welche der Logarithmus annehmen kann. Aber ohne Konsequenz in der Verwendung der komplexen Zahlen ist das Paradoxon schlechterdings unerklärlich.[2])

1) Histoire de l'Académie de Berlin Bd. V (1749)

2) Die vorhin schon erwähnte Eulersche Formel lehrt, daß

$$e^z = \cos(-iz) + i \sin(-iz) = \cos iz - i \sin iz \text{ ist.}$$

Daher wird
$$e^{z+2i\pi} = \cos(iz - 2\pi) - i \sin(iz - 2\pi) = \cos iz - i \sin iz = e^z.$$

Ebenso wird für jedes ganze h $\quad e^{z+2hi\pi} = e^z,$

eine Funktionalgleichung, welche der bekannten Formel $\cos(z + 2h\pi) = \cos z$ ganz analog ist. Ähnlich wie diese bringt also jene zum Ausdruck, daß e^z eine periodische Funktion mit der Periode $2i\pi$ ist Ähnlich wie daher die Umkehrungsfunktionen $\arcsin z$ und $\arccos z$ unendlich vieldeutige Funktionen werden, so ist auch die Umkehrungs-

Die vorlaufigen Bemerkungen, die wir damit abbrechen, erwecken hoffentlich im Leser schon den Eindruck von Notwendigkeit, Nützlichkeit und Schönheit des Komplexen. Durch Beispiele aus Anwendungsgebieten, wie Hydrodynamik, Optik, Himmelsmechanik, Geometrie, Zahlentheorie, könnte dieser Eindruck noch beliebig vertieft werden. Doch wollen wir uns mit dem Wenigen begnugen.

Historisch ist es noch ein weiter Weg von diesen ersten Einsichten bis zu einer Funktionentheorie in unserem heutigen Sinn als einem selbstandigen Lehrgebäude. Wir werden diesen Weg jetzt nicht in seinen einzelnen Etappen verfolgen. Wir wollen lieber gleich mitten in die Sache hineingehen und, nach einer knappen Erorterung der komplexen Zahlen selbst, zunächst versuchen, die Lehren der reellen Analysis auf unser neues Gebiet zu ubertragen. Wir werden so von Reihenlehre, von Grenzwerten, von Differentialquotienten, von Integralen horen und damit Schritt fur Schritt diesen ersten Gesichtspunkt einer Analogie zum Reellen veranlassen, um allmahlich zu den charakteristischen und neuen Lehren der Theorie zu gelangen.

Erster Abschnitt.

Komplexe Zahlen.

§ 1. Arithmetische Theorie der komplexen Zahlen.[1])

1. Historisches. Wer auf der Schule mit komplexen Zahlen rechnen lernt, befolgt den Weg, den auch die Wissenschaft ging. Man gewohnt sich allmahlich an das Neue und Unbehagliche, das zunachst den komplexen Zahlen anhaftet. Man steht unter dem mächtigen Trägheitsgesetz des menschlichen Geistes, das uns die formalen Rechenregeln auf diese Gebilde anzuwenden treibt, obwohl ihnen bei etwas näherem Zusehen eine reale Bedeutung abzugehen scheint, obwohl sie in den Anwendungen die Rolle unmoglicher Losungen oftmals spielen, und obwohl man nicht einsieht, wieso man mit Unmoglichen soll rechnen konnen. Gerade das ist es, was nachdenkliche Mathematiker vor Gauß und ruckstandige Kopfe nach Gauß immer wieder gegen die komplexen Zahlen

funktion von $w = e^z$, die wir mit Euler log w nennen wollen, unendlich vieldeutig, und die zu gegebenem Werte von w gehorigen Logarithmen unterscheiden sich, wie wir S 79 noch naher sehen werden, um Vielfache von $2i\pi$ voneinander. Einer dieser Werte ist fur reelle positive w reell, und an den denkt man wohl gewohnlich zuerst. Zur Auflosung der erwahnten Paradoxie muß man aber konsequent auch die anderen Werte bedenken. Freilich finden diese Bemerkungen ihre volle Begrundung erst S. 74ff.

1) Leser, welche diesen § 1 zu schwer finden, mogen bei § 2 beginnen.

geltend machten. Und doch ging nebenher die steigende Einsicht, daß man sie doch nötig habe, ging nebenher die Erfahrung, daß die über den Umweg durchs Imaginäre gewonnenen reellen Resultate sich stets nachträglich bestätigen ließen. Der Weg durchs Imaginäre machte überdies einen besonders eleganten Eindruck. Aber woher kam dem Unmöglichen diese geheimnisvolle Kraft?

Daß man die Antwort auf diese Frage erst so spät fand, daß man vor Gauß so sehr im Dunkeln tappte, hat seinen inneren Grund in dem Charakter der Mathematik in den vorausgehenden Jahrhunderten. In dieser Zeit war begriffliches Denken den meisten Mathematikern sehr fremd. Versuchte doch noch Euler zu beweisen, daß man alle unmöglichen Zahlen auf die Form $x + iy$[1]) bringen könne.[2]) Daß man dazu aber vorher aus der Vorstellung „unmögliche Zahl" einen Begriff machen musse, daß man anders zu logischen Schlüssen weder eine Unterlage noch ein Recht besitzt, war Euler und seiner Zeit fremd. Grob ausgedrückt ist doch für uns heute die Sache so, daß das, was Euler beweisen wollte, gerade erst die Begriffsbestimmung seines Vorstellungsinhaltes „unmögliche Zahl" abgibt.

Das Wesen der Sache hat erst Gauß erfaßt. Gleich allen großen Genies wurzelt er zwar durchaus in der Vergangenheit[3]), hat sich aber über dieselbe erhoben. Wenn man nun doch heute meist der gleich darzulegenden, auf Hamilton (1835) zurückgehenden englischen Theorie den Vorzug gibt, so hat dies seinen Grund darin, daß in dieser rein arithmetischen Darstellung die leitenden Gedanken noch klarer hervortreten als in der Gaußschen geometrischen Einkleidung. Ich beginne daher mit dieser arithmetischen Theorie.

2. Zahlenpaare. An der Spitze steht der Satz. *Das Rechnen mit komplexen Zahlen ist ein Rechnen mit Zahlenpaaren. Unter einen „komplexen Zahl" versteht man ein geordnetes Paar (a, b) reeler Zahlen*[4]), wofern gewisse Operationen erklärt sind, welche mit diesen Zahlenpaaren vorgenommen werden sollen.

1) Die Bezeichnung $i = \sqrt{-1}$ hat Euler als erster 1777 gebraucht. Indessen scheint sie sich erst seit Gauß (von 1801 an) eingebürgert zu haben.

2) Mémoire de l'Académie de Berlin V année 1749 S. 222—228.

3) Noch in seiner Dissertation von 1799 finden sich Anklänge daran, daß er noch nicht voll mit der Tradition gebrochen hat. Erst 1831 ist volle Klarheit nachweisbar. Eine sehr gute Darstellung dieser historischen Sachverhalte findet der Leser in der französischen Ausgabe der math. Enzyklopädie im Bd. I, 1 S. 337. Hier geben wir nur so viel, als für das Verständnis der Fragestellung zweckdienlich erscheint. Erwähnt mag nur noch werden, daß der in dänischen Diensten stehende Norweger Caspar Wessel in einer 1799 erschienenen (am 10. 3. 1797 der dänischen Akademie vorgelegten) Schrift, die unbeachtet blieb, eine ausführliche Theorie der komplexen Zahlen auf geometrischer Grundlage entwickelte. Wenn er so auch Gauß voranzustellen ist, der sich mit knappen Andeutungen begnügt, so blieb doch andererseits Wessels Arbeit ohne Einfluß.

4) Es wird gewöhnlich in der Form $a + ib$ geschrieben, eine Schreibweise, auf die uns auch unsere weiteren Betrachtungen hinführen werden.

Geordnet heißt das Zahlenpaar, weil (a, b) von (b, a) unterschieden werden soll. Wir wollen ein derartiges Operieren mit den komplexen Zahlen „Rechnen" nennen. An sich ist es vollig willkurlich und ganz unserem Entschluß anheimgegeben, wie wir diese Operationen erklaren, und wie wir sie benennen wollen. Indessen werden wir den Wunsch haben, unsere Wahl durch den Zweck zu bestimmen, welchen wir mit der Einfuhrung der komplexen Zahlen verfolgen. Wir wollen ja mit den neuen, den komplexen Zahlen eine *Erweiterung* des Zahlbegriffes vornehmen. Wir haben namlich bei der Auflosung der quadratischen Gleichungen, z. B. schon bei $x^2 + 1 = 0$, die Erfahrung gemacht, daß man nicht mit den reellen Zahlen auskommt. Unsere Zahlenpaare sollen also als speziellen Fall die gewohnlichen reellen Zahlen, in nur etwas anderer Bezeichnung, unter sich begreifen. Die Rechenoperationen sollen demnach weiter so formuliert werden, daß sie in Anwendung auf die gewohnlichen Zahlen, die wir weiter als die reellen Zahlen bezeichnen, zu denselben Resultaten fuhren, wie die dort ublichen, Addition und Multiplikation genannten Operationen. Weiter werden wir den Wunsch haben, daß fur Addieren und Multiplizieren nicht nur in diesem Spezialfall, sondern uberhaupt soweit als möglich unsere gewohnten Rechenregeln bestehen bleiben. Wir werden beweisen, daß die folgenden Festsetzungen diese „Permanenz der formalen Regeln"[1]) gewahrleisten.

Das Zahlenpaar $(a, 0)$ lassen wir der gewohnlichen Zahl a entsprechen und verabreden, statt $(a, 0)$ auch kurz a zu schreiben $(a, 0) = a$.

Unter der Summe $(a, b) + (c, d)$ der beiden komplexen Zahlen (a, b) und (c, d) verstehen wir die Zahl $(a + c, b + d)$. Also wird unserem Wunsche entsprechend insbesondere

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0) = a + c.$$

Unter dem Produkt $(a, b) \cdot (c, d)$ verstehen wir die komplexe Zahl $(ac - bd,\ ad + bc)$. Dann ist insbesondere, wie es sein sollte, $(a, 0)\ (c, 0) = (ac, 0) = ac$.

3. Rechenregeln. Man sieht ohne weiteres, daß fur diese Erklarungen das kommutative, assoziative und distributive Gesetz bestehen bleiben, daß also fur die Zahlenpaare $\alpha = (a, b)$, $\beta = (c, d)$, $\gamma = (e, f)$ die Gesetze

$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	kommutatives Gesetz der Addition
$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$	kommutatives Gesetz der Multiplikation
$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$	assoziatives Gesetz der Addition
$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$	assoziatives Gesetz der Multiplikation
$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$	distributives Gesetz

1) Dieser Ausdruck stammt von Hermann Hankel, der durch seine 1867 erschienene „Theorie der komplexen Zahlensysteme" sehr fordernd gewirkt hat.

in Geltung bleiben. Wir überlassen dem Leser die Aufgabe, die zur Prüfung nötige kleine Rechnung auszuführen.

Wir verabreden weiter, die häufig vorkommende komplexe Zahl $(0, 1)$ kurz mit i zu bezeichnen. Dann wird

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b \cdot (0, 1) = a + ib.$$

Ferner aber wird $\quad i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$

Wir können also auch $i = \sqrt{-1}$ schreiben, und damit haben wir den Anschluß an die übliche Schreibweise $a + ib$ der komplexen Zahlen erreicht.

Wir haben nämlich dargelegt, woher man das Recht nimmt, so zu schreiben.

a heißt der *Realteil*, b der *Imaginärteil* der komplexen Zahl $\alpha = a + ib$.

Man schreibt $a = \Re(\alpha)$ und $b = \Im(\alpha)$.

Zwei komplexe Zahlen sollen nur dann *gleich* heißen, wenn sie identisch sind. Sie stimmen also stets in Realteil und in Imaginärteil überein.

Die Zahl $\bar{\alpha} = a - ib$ heißt zu $\alpha = a + ib$ *konjugiert*. Stets werden wir die konjugierten Zahlen durch *Überstreichen* bezeichnen. Eine Zahl heißt *reell*, wenn ihr Imaginärteil verschwindet. Sie heißt *rein imaginär*, wenn ihr Realteil Null ist. Für reelle Zahlen und nur für sie ist $\alpha = \bar{\alpha}$; rein imaginäre Zahlen dagegen sind durch $\alpha = -\bar{\alpha}$ gekennzeichnet. Stets ist $\alpha + \bar{\alpha} = 2\Re(\alpha)$ reell und $\alpha - \bar{\alpha} = 2i\Im(\alpha)$ rein imaginär.

Es gibt eine einzige komplexe Zahl Null, die der Gleichung

$$\alpha + \xi = \alpha$$

genügt. Das ist natürlich die reelle Zahl Null. Um das einzusehen, hat man nur auf beiden Seiten der Gleichung $-\alpha$ zu addieren $(-\alpha = -1 \cdot \alpha)$.

Ebenso ist die reelle Zahl Eins die einzige Lösung der Gleichung $\alpha\xi = \alpha$, wenn $\alpha \neq 0$ ist.

Man hat, um das einzusehen, nur beide Seiten mit

$$\beta = \frac{\bar{\alpha}}{a^2 + b^2}$$

zu multiplizieren. Wir wollen diese Zahl β fortan mit $\frac{1}{\alpha}$ bezeichnen, weil ja $\beta \cdot \alpha = 1$ ist. Denn es ist ja $a^2 + b^2 = \alpha \cdot \bar{\alpha}$. Dabei ist vorausgesetzt, daß $\alpha \neq 0$ ist, d. h. daß nicht a und b gleichzeitig verschwinden, d. h. daß $a^2 + b^2 \neq 0$ ist. Denn sonst genügt ja jede Zahl unserer Gleichung $\alpha\xi = \alpha$.

Ein Produkt kann nur dann verschwinden, wenn ein Faktor verschwindet. Denn wenn $\alpha \neq 0$ ist, aber doch $\alpha\xi = 0$ ist, so muß $\xi = 0 \cdot \frac{1}{\alpha} = 0$ sein, wie man durch Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit $\frac{1}{\alpha}$ erkennt.

Damit sind alle Axiome, deren Aufzählung der Leser etwa in meinem Leitfaden der Differentialrechnung auf S. 13/14 nachlesen möge, als gültig

erkannt. Nur die Monotoniegesetze sind noch nicht besprochen. Es soll nicht näher davon die Rede sein, daß sie tatsächlich nicht mehr gelten, oder besser gesagt, daß die Relationen großer und kleiner im Gebiete der komplexen Zahlen nicht erklart werden, da man ihrer nicht bedarf. Wollte man sie doch einfuhren, so wären sie sicher nicht mehr in der vom Reellen gewohnten Art mit den Rechenregeln verknupft.

4. Einzigkeit der komplexen Zahlen. Wir haben also eingesehen, daß unseren ursprunglichen Forderungen durch unsere Festsetzungen genugt wird. Manchem Leser wird es aber nicht recht erklarlich sein, wie man auf diese Festsetzungen kommt, und er wird sich fragen, ob es nicht noch andere Festsetzungen gibt, welche dem gleichen Zweck genugen. Daß man es gerade erst einmal mit unseren Festsetzungen versucht, hat seinen Grund darin, daß es ja gerade die Festsetzungen sind, auf die man stoßt, wenn man ganz naiv z. B. auf der Schule mit $i^2 = -1$ und den anderen Regeln an die komplexen Zahlen herantritt. Ob es aber die einzigen Festsetzungen sind, die den Bedingungen genugen, das ist eine Frage, die noch nicht restlos geklart ist. Bisher hat nur gezeigt werden konnen, daß unter gewissen Voraussetzungen keine weiteren wesentlich anderen Festsetzungen mehr moglich sind. Diese Voraussetzungen halten daran fest, daß Summe und Produkt eindeutige und stetige Funktionen der Summanden bzw. Faktoren sein sollen. Damit ist folgendes gemeint: Real- und Imaginarteil von Summe und Produkt sollen eindeutig und stetig durch Real- und Imaginarteil der Summanden bzw. Faktoren bestimmt sein [1])

Das Zahlensystem kann nicht dadurch aufs neue erweitert werden, daß man etwa Zahlentripel usw. heranzieht. Denn man kann beweisen[2]), daß man auf keine Weise fur derartige Gebilde die Rechenprozesse so erklaren kann, daß alle Rechenregeln bestehen bleiben

5. Bedeutung der komplexen Zahlen für die algebraischen Gleichungen. Die hohe Bedeutung der komplexen Zahlen kommt so recht im Fundamentalsatz der Algebra zum Ausdruck. Zwar werden wir erst spater einen Beweis dafur kennenlernen, doch wollen wir jetzt schon den Satz formulieren und ihn in einfachen Fallen bestatigen. Nach diesem Satz hat jede algebraische Gleichung mit komplexen Koeffizienten mindestens eine (komplexe) Wurzel. Namentlich also haben die Gleichungen $z + \alpha = \beta$ und $z\alpha = \beta$ mit $\alpha \neq 0$ genau eine Wurzel.[3]) So sind nun auch Subtraktion und

1) Vgl. meine Arbeit in Mathematische Zeitschrift Bd. 2 (1918) S. 171—179 und G. Hoheisel in Sitz.-Ber. d. pr. Akad d. Wiss 1929.

2) Frobenius: Crelles Journal Bd. 84 (1878).

3) Daß keine Gleichung mehr Wurzeln haben kann, als ihr Grad angibt, sieht man genau wie im Reellen ein. Siehe z. B. meinen Leitfaden der Differential- und Integralrechnung I. S. 7.

Division eindeutig erklart. Wir wollen die Losungen mit $\beta - \alpha$ und $\frac{\beta}{\alpha}$ bezeichnen. Sei etwa $\alpha = a + ib$ und $\beta = c + id$, so sind die Losungen

$$\beta - \alpha = c - a + i(d - b) \quad \text{und} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot (c + id) \cdot (a - ib).$$

Das bekommt man im ersten Fall dadurch heraus, daß man rechts und links $-\alpha$ addiert. Damit ist auch gezeigt, daß die angegebene die einzige Lösung ist. Im Falle der Gleichung $z\alpha = \beta$ multipliziert man rechts und links mit der zu α konjugiert imaginaren Zahl $\bar{\alpha}$. Dann wird $z\alpha\bar{\alpha} = \beta\bar{\alpha}$. Nun multipliziert man rechts und links mit $\frac{1}{\alpha\bar{\alpha}} = \frac{1}{a^2 + b^2}$. So erhalt man dann rechts die Zahl $\frac{1}{\alpha\bar{\alpha}} \cdot \beta \cdot \bar{\alpha} = \beta \cdot \frac{1}{\alpha}$, die wir mit $\frac{\beta}{\alpha}$ bezeichnen. Daß fur das Rechnen mit solchen Bruchen die gewohnten Regeln gelten, sieht man leicht ein.

Leicht erkennt man nun auch, daß alle quadratischen Gleichungen mit reellen oder komplexen Koeffizienten losbar werden. Wenn man an den Herleitungsprozeß fur die Auflosungsformel der Gleichung zweiten Grades denkt, so erkennt man leicht, daß man nur zu zeigen hat, daß man nun aus jeder komplexen Zahl die Quadratwurzel ziehen kann. Soll aber etwa

$$(x + iy)^2 = a + ib$$

sein, so findet man daraus sofort

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a \\ 2xy \quad &= b. \end{aligned}$$

Also wird
$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

Die Wahl der Vorzeichen ist durch die Bedingung $2xy = b$ festgelegt.

§ 2. Geometrische Deutung der komplexen Zahlen.

1. Addition und Substraktion. Die komplexen Zahlen $z = x + iy$ bilden eine zweiparametrige Schar: (x, y). Will man sie also *geometrisch deuten*, so wird man dazu nicht wie bei den reellen Zahlen eine Zahlengerade benutzen. Man wird vielmehr eine *Zahlenebene* heranziehen. Das ist zuerst durch Gauß bekannt geworden. Sie heißt daher auch die Gaußsche Zahlenebene. Die komplexe Zahl $\alpha = a + ib = (a, b)$ bestimmt den Punkt P mit den rechtwinkligen Koordinaten $x = a$ und $y = b$ und den Vektor OP (O Koordinatenanfang). Auf der x-Achse werden dabei die reellen, auf der y-Achse die rein imaginaren Zahlen aufgetragen. Daher heißt die x-Achse auch *reelle Achse*, die y-Achse aber *imaginäre Achse*. Der Realteil einer komplexen Zahl erscheint wieder als x-Komponente, der Imaginärteil als y-Komponente des zur kom-

plexen Zahl gehörigen Vektors. Es ist reizvoll, sich die Rechenprozesse geometrisch zu veranschaulichen. Seien z_1 und z_2 die Koordinaten zweier Punkte, die wir kurz mit z_1 und z_2 bezeichnen wollen. Man erhält dann den Punkt $z_3 = z_1 + z_2$ nach der Konstruktion des Parallelogramms der Kräfte. Man legt nämlich durch z_1 als Anfangspunkt einen Vektor, der mit dem Vektor z_2 in Richtung und Länge übereinstimmt. Er endigt im Punkte z_3. Daß man dabei auch z_1 und z_2 ihre Rollen vertauschen lassen kann, leuchtet geometrisch ein und bringt das kommutative Gesetz der Addition zur Anschauung. Alles weitere entnimmt der Leser der Fig. 1, wo die drei Vektoren $0z_1$, z_1z_3, $0z_3$ ein Dreieck bilden.

Die Zahl $-z$ bestimmt einen Vektor, der die entgegengesetzte Richtung, aber die gleiche Länge wie der Vektor z besitzt. Danach wird der

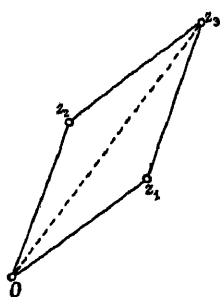
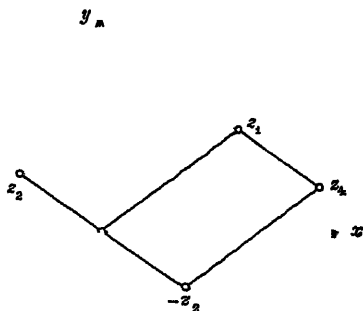
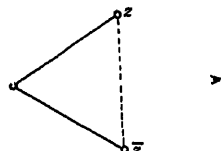



Fig 1. Fig. 2. Fig. 3.

Leser die geometrische Bedeutung der Subtraktion aus Fig. 2 ablesen. $z_4 = z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

Die Zahl $\bar{z}$ geht durch Spiegelung an der reellen Achse aus der Zahl z hervor. Fig. 3 bringt das zur Anschauung.

2. Multiplikation. Um sich nun in ähnlicher Weise die Multiplikation zu verdeutlichen, tut man gut, Polarkoordinaten einzuführen. Die Länge des Vektors z wird $r = +\sqrt{x^2 + y^2} = +\sqrt{z\bar{z}}$. Diese Zahl heißt *absoluter Betrag* von z und wird nach Weierstraß wie im Reellen mit $|z|$ bezeichnet. Für reelles z fällt nämlich diese Erklärung des absoluten Betrages mit der üblichen zusammen. Wir führen weiter in der komplexen Ebene einen positiven Drehsinn ein. Wir legen ihn durch die Forderung fest, daß durch Drehung um den Winkel $\pi/2$ im positiven Sinn die positive x-Richtung in die positive y-Richtung übergeführt werde. Dann sei φ der Winkel, um welchen man in positiver Richtung die positive x-Richtung zu drehen hat, um sie in die Richtung des Vektors z überzuführen. Wichtig ist die Bemerkung, daß dieser Winkel nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist. Da also jedem Wert von z Werte von φ zugehören, so ist φ eine Funktion der komplexen Veränderlichen z, die wir mit $\arg z$

(lies *Argument von z*)[1]) bezeichnen wollen, und zwar ist $\varphi = \arg z$ eine unendlich vieldeutige Funktion von z, insofern, als zu jedem Wert z unendlich viele Winkel φ gehören, die sich voneinander um Vielfache von 2π unterscheiden. Diese Funktion, die uns hier zum ersten Male entgegentritt, spielt eine besonders wichtige Rolle in der ganzen Funktionentheorie. Mit Hilfe von $|z| = r$ und φ laßt sich nun $z = x + iy$ so darstellen: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.[2])

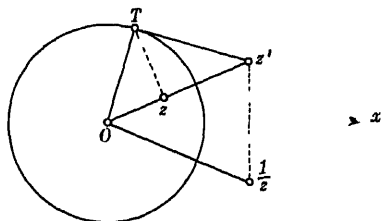
Hat man nun zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 zu *multiplizieren*, so erhalt man

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1|\,|z_2|\,(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i[\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1]) \\ &= |z_1|\,|z_2|\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \end{aligned}$$

Man sieht also, *daß der absolute Betrag des Produktes dem Produkt der absoluten Betrage der Faktoren gleich ist:* $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ *und daß das Argument des Produktes der Summe der Argumente der Faktoren gleich ist*· $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

3. Division. Wir kommen zur *Division*, und beginnen da mit $\frac{1}{z}$. Man hat $\frac{1}{z} = \frac{\bar z}{z\bar z} = \frac{\bar z}{|z|^2}$. Da aber $|z| = |\bar z|$ und $\arg z = -\arg\bar z$ ist, so wird $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ und $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z$ Daher wird nun $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ und $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$ Denn man hat ja $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar z_2}{|z_2|^2}$. *Man erhalt also den absoluten Betrag eines Quotienten als Quotient der absoluten Betrage und das Argument des Quotienten als Differenz der Argumente von Zahler und Nenner*

Fig 4

Die gegenseitige Lage der Punkte z und $\frac{1}{z}$ kann man sich an Hand der folgenden Konstruktion klarmachen Man konstruiere (Fig. 4) zunachst den Punkt z', der aus z durch Transformation nach reziproken Radien am Kreis vom Radius Eins um $z = 0$ hervorgeht.[3]) Diesen Kreis nennen wir fortan *Einheitskreis*. Da in Fig. 4 das Dreieck

1) Auch die Benennung „Amplitude" ist gebrauchlich.

2) Haufig ist es bequemer, statt des $\arg z$ den Faktor $\cos\varphi + i\sin\varphi$ heranzuziehen. Er spielt bei den komplexen Zahlen offenbar dieselbe Rolle wie das Vorzeichen bei den reellen Zahlen und wird daher auch mit $\operatorname{sign} z$ bezeichnet (lies signum von z). Also setzen wir $\operatorname{sign} z = \cos\varphi + i\sin\varphi = \frac{z}{|z|}$. $\operatorname{sign} z$ ist im Gegensatz zu $\arg z$ eine eindeutige Funktion von z.

3) Die Winkel $0zT$ und $0Tz'$ sollen also rechte Winkel sein.

$0z'T$ bzw. $0zT$ bei T rechtwinklig ist, so entnimmt man sofort dem Kathetensatz, daß tatsächlich $|z|\,|z'| = 1$, daß also $|z'| = \frac{1}{|z|}$. Dabei ist aber noch $\arg z' = \arg z$. Spiegelt man also noch z' an der reellen Achse, so erhält man $\frac{1}{z} = \bar{z}'$. Nebenbei bemerkt ist also $z' = \frac{1}{\bar{z}}$. (Siehe auch S. 46ff.)

Wir wenden die gefundenen Ergebnisse noch auf Potenzen und Wurzeln an. Sei n eine ganze positive Zahl. Dann hat man $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$. Denn $\cos\varphi + i\sin\varphi$ hat den absoluten Betrag Eins. Wendet man nun auf $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$ den binomischen Lehrsatz an und trennt dann Real- und Imaginärteil, so findet man die bekannten Darstellungen von $\cos n\varphi$ und $\sin n\varphi$ durch $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$. (Vgl. S. 1 Fußnote 1.)

Betrachten wir nun $\sqrt[n]{a}$, so wird der absolute Betrag von $\sqrt[n]{a}$ die positiv genommene n-te Wurzel aus dem absoluten Betrag von a. Das Argument von $\sqrt[n]{a}$ hingegen wird der n-te Teil des Argumentes von a. Dabei kommt aber nun wesentlich zur Geltung, daß $\arg z$ eine unendlich vieldeutige Funktion von z ist. Die verschiedenen Werte von $\arg a$ unterscheiden sich voneinander um Vielfache von 2π. Teilt man sie alle durch n, so erhält man Werte, die sich voneinander um Vielfache von $\frac{2\pi}{n}$ unterscheiden. Seien etwa $\varphi + 2h\pi$ die Werte von $\arg a$, so werden $\frac{\varphi}{n} + h\frac{2\pi}{n}$ die Werte von $\arg(\sqrt[n]{a})$. Diesen Winkeln entsprechen im ganzen n verschiedene Richtungen in der z-Ebene. Denn von den n Winkeln $\frac{\varphi}{n}$, $\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}$, $\frac{\varphi}{\pi} + 2\frac{2\pi}{n}, \ldots,$ $\frac{\varphi}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}$ unterscheiden sich alle anderen $\frac{\varphi}{n} + \frac{2h\pi}{n}$ nur um Vielfache von 2π. Demnach gibt es also n verschiedene Zahlen, deren n-te Potenz a ist. Sie liegen sämtlich auf einem Kreis vom Radius $|\sqrt[n]{|a|}|$ um den Punkt $z = 0$ und bilden auf ihm die Ecken eines regulären n-Ecks. Wir bringen in Fig. 5 den Fall $a = 1$, $n = 5$ zur Anschauung. Die fünf dort angegebenen Zahlen sind also die fünf Wurzeln der Gleichung $z^5 - 1 = 0$. Allgemein hat so die Gleichung $z^n - a = 0$ genau n voneinander verschiedene Wurzeln. Wir finden also bei dieser Gleichung den Fundamentalsatz der Algebra bestätigt.

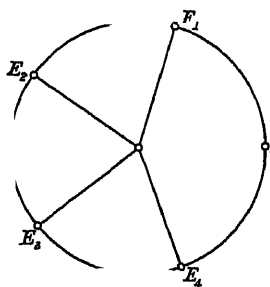



Fig. 5

4. Absoluter Betrag. Die Betrachtung der absoluten Beträge bei Summe und Differenz führt zu einigen wichtigen Ungleichungen. Aus dem Dreieck $0z_1z_3$ der Fig. 1 liest man sofort ab, daß

$$|z_3| \leqq |z_1| + |z_2|$$

und daß

$$|z_3| \geqq |z_1| - |z_2|$$

ist. *Der absolute Betrag einer Summe ist also höchstens der Summe der absoluten Beträge und mindestens der Differenz der absoluten Beträge der Summanden gleich.* Dies ergibt sich sofort, wenn man beachtet, daß die absoluten Beträge die Längen der Dreiecksseiten sind, und daß so unsere Ungleichungen bekannte Beziehungen zwischen den Dreiecksseiten zum Ausdruck bringen. Wenn aber die drei Vektoren alle auf eine Gerade fallen, so kommen in den Ungleichungen bekannte Längenbeziehungen zum Ausdruck, die ja schon die geometrische Bedeutung der entsprechenden Ungleichungen für reelle Zahlen ausmachen. Man erkennt auch, daß in der ersten Ungleichung das Gleichheitszeichen nur stehen kann, wenn alle drei Vektoren gleich gerichtet sind, und daß es in der zweiten nur dann eintritt, wenn z_1 und z_2 verschiedene Richtung haben, aber auf derselben Geraden liegen, und wenn gleichzeitig z_1 keinen kleineren Betrag hat als z_2.

Will man diese Abschätzungen rein rechnerisch ohne Bezugnahme auf eine geometrische Deutung beweisen, so kann man etwa so vorgehen.

5. Die Schwarzsche Ungleichung. Sie besagt, daß für reelle x_i, y_i

$$(\sum x_i y_i)^2 \leqq \sum x_i^2 \cdot \sum y_i^2 \tag{1}$$

ist. Denn für reelles λ ist

$$\sum x_i^2 + 2\lambda \sum x_i y_i + \lambda^2 \sum y_i^2 = \sum (x_i + \lambda y_i)^2 \geqq 0. \tag{2}$$

Daraus folgt (1), weil sonst das Polynom in (2) für zwei verschiedene reelle Werte von λ verschwände und daher auch für passende Werte von λ negativ würde. Aus (1) folgt

$$-\sqrt{\Sigma x_i^2}\sqrt{\Sigma y_i^2} \leqq \Sigma x_i y_i \leqq \sqrt{\Sigma x_i^2}\sqrt{\Sigma y_i^2}.$$

Setzt man $z_1 = x_1 + i x_2$, $z_2 = y_1 + i y_2$, so ist hiernach

$$-2\,|z_1|\,|z_2| \leqq z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 \leqq 2\,|z_1|\,|z_2|.$$

Daher ist auch

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 \leqq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$$

und

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 \geqq |z_1|^2 + |z_1|^2 - 2\,|z_1|\,|z_2| = (|z_1| - |z_2|)^2.$$

Also ist

$$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|.$$

$$|z_1 + z_2| \geqq \big|\,|z_1| - |z_2|\,\big|.$$

Zweiter Abschnitt.

Grenzwerte und Reihen.

§ 1. Einige Grundbegriffe.

1. Prinzip der Intervallschachtelung. Wie im Reellen, so sei auch im Komplexen das Prinzip der Intervallschachtelung die Grundlage fur alle Betrachtungen uber Grenzwerte und Reihen.[1])

Das *Prinzip der Intervallschachtelung* besagt folgendes: *Auf einer Zahlengeraden sei eine unendliche Folge ineinanderliegender Intervalle* $i_1, i_2, \quad i_n \ldots$ *gegeben, also derart, daß jedes alle anderen mit größerer Nummer enthalt. Die Längen der Intervalle sollen gegen Null konvergieren. Dann gibt es genau einen Punkt, der dem Inneren oder dem Rand aller dieser Intervalle angehort. Wir sagen dafür auch kurz: Die Intervalle ziehen sich auf einen Punkt zusammen und nennen diesen Punkt den innersten Punkt der Intervalle.*

Von diesem Satz machen wir zunachst die folgende Anwendung. *In der komplexen Ebene sei eine Folge ineinanderliegender Rechtecke gegeben, deren Seiten durchweg der reellen und der imaginaren Achse parallel sein mogen. Die Langen der Rechtecksdiagonalen mogen gegen Null konvergieren. Dann gibt es genau einen Punkt, der dem Inneren oder dem Rand aller dieser Rechtecke angehört. Wir sagen dafur auch kurz. Die Rechtecke ziehen sich auf einen Punkt zusammen und nennen diesen Punkt den innersten Punkt der Rechtecke.*

Dieser Satz kann unmittelbar aus dem an die Spitze gestellten Prinzip erschlossen werden. Man hat dazu nur die Abszissen und die Ordinaten der Rechteckspunkte zu betrachten. So erhält man sowohl auf der reellen wie auf der imaginaren Achse eine Intervallschachtelung. Die Punkte, auf welche sich die Intervalle zusammenziehen, bestimmen die Koordinaten des innersten Punktes der Rechteckschachtelung.

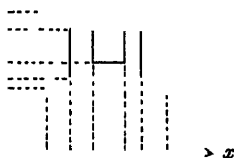



Fig 6

2. Häufungspunkte. Eine unmittelbare Folge dieses Prinzips ist der Satz über die *Existenz der Haufungswerte.* Es sei eine unendliche Folge von komplexen Zahlen gegeben. $z_1, z_2 \ldots$ *Unter einem* H a u f u n g s w e r t dieser *Folge verstehen wir eine Zahl* z *derart, daß fur jedes* $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $|z - z_n| < \varepsilon$ fur unendlichviele Nummern n erfullt ist. Geometrisch bedeutet dies folgendes. Die Ungleichung $|z - z_n| < \varepsilon$ druckt aus, daß z_n einem um den Punkt z mit dem Radius ε geschlagenen Kreis angehort (oder, was dasselbe ist, daß z in einem um z_n mit dem gleichen Radius geschlagenen Kreis liegt). Wenn also in jedem

1) Vgl. z. B. meinen Leitfaden der Differentialrechnung.

um z geschlagenen Kreis unendlichviele z_n liegen, dann heißt z ein Häufungspunkt der Punktfolge oder die Zahl z ein Häufungswert der Zahlenfolge z_n.

Dann gilt der folgende Satz:

Eine beschränkte Zahlenfolge besitzt mindestens einen Häufungswert. Beschränkt aber heißt eine Folge von komplexen Zahlen dann, wenn die Folge der absoluten Beträge ihrer Zahlen beschränkt ist. Geometrisch ausgedrückt heißt das, daß ihre Punkte[1]) alle dem Inneren eines Kreises oder, was dasselbe[2]) ist, dem Inneren eines Rechteckes oder eines anderen endlichen Bereiches angehören. Der Beweis verläuft so: Ich teile das Rechteck, dem alle Punkte angehören und dessen Seiten zu den Koordinatenachsen parallel angenommen werden können, durch Parallele zu seinen Seiten in vier kongruente Rechtecke. Mindestens einem derselben müssen dann unendlich viele Punkte der Folge angehören, wenn anders die Folge wirklich unendlich viele Punkte enthalten soll. Ein solches Teilrechteck, welches unendlich viele Punkte enthält, teilen wir wieder in vier gleiche Teile. Und wieder muß eines der neuen Teilrechtecke unendlich viele Punkte enthalten. Dieses teilen wir wieder. So fortfahrend erhalten wir eine Rechteckschachtelung. Der innerste Punkt derselben ist ein Häufungspunkt der Zahlenfolge, weil jedem Rechteck der Schachtelung unendlich viele Punkte der Folge angehören. Also gehören auch jedem um den innersten Punkt geschlagenen Kreis unendlich viele Punkte der Folge an. Denn von einem gewissen an liegen alle Rechtecke der Folge in einem bestimmt gegebenen derartigen Kreis.

§ 2. Grenzwerte und Reihen.

1. Zahlenfolgen. Die Definitionen, Sätze und Beweise sind auch hier fast durchweg so genau dem reellen Gebiet nachgebildet, daß wir uns meist recht kurz fassen können.

Man sagt, eine beschränkte Zahlenfolge $z_1, z_2 \ldots$ besitze einen *Grenzwert*, wenn sie nur einen Häufungspunkt besitzt[3]) Das ist dann und nur dann der Fall, wenn es eine Zahl z gibt derart[4]), daß $\lim_{n \to \infty} | z_n - z | = 0$. Wir schreiben

1) Wir werden weiterhin bald von Punkten, bald von Zahlen reden, je nach Bequemlichkeit.

2) Denn gehören sie alle einem Kreis an, so gehören sie auch alle einem dem Kreis umbeschriebenen Quadrat an.

3) Man überträgt diesen Begriff manchmal auf nicht beschränkte Zahlenfolgen und sagt, ∞ sei der Grenzwert einer solchen Zahlenfolge, wenn sie keinen endlichen Häufungspunkt besitzt, wenn also ihre Zahlen von einer gewissen Nummer an alle außerhalb eines beliebig vorgegebenen Kreises liegen.

4) Wenn diese Bedingung für eine Zahlenfolge erfüllt ist, so ist dieselbe natürlich auch beschränkt.

dann auch $\lim_{n\to\infty}(z_n - z) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. z heißt der Grenzwert der Zahlenfolge, welche selbst „*konvergent*" genannt wird. Die Satze vom Grenzwert einer Summe, eines Produktes, eines Quotienten ubertragen sich so unmittelbar, daß wir uns mit dieser Feststellung begnugen können.

Das *allgemeine Konvergenzprinzip* läßt sich ohne weiteres ins Komplexe ubertragen. Eine Zahlenfolge $z_1, z_2 \cdots$ besitzt danach dann und nur dann einen endlichen Grenzwert, wenn zu jedem ε ein $N(\varepsilon)$ gehort, derart, daß $|z_{n+m} - z_n| < \varepsilon$ wird fur $n > N(\varepsilon)$ und beliebiges $m \gtreqless 0$. Geometrisch besagt diese Bedingung, daß von der Nummer $N(\varepsilon)$ an alle Zahlen der Folge einem Kreise vom Radius ε um den Punkt z_n angehoren. Da nämlich außerhalb dieses Kreises nur endlich viele Zahlen der Folge liegen, so ist jede Folge, die der Bedingung des Konvergenzprinzips genugt, beschrankt. Sie besitzt also mindestens einen Häufungspunkt. Sie kann aber, wie weiter aus der Bedingung des Prinzips folgt, nicht mehr als einen Haufungspunkt besitzen. Denn weil alle Zahlen der Folge bis auf endlich viele in einem Kreise vom Radius ε Platz haben, kann außerhalb dieses Kreises kein Haufungspunkt der Folge liegen. Denn in beliebiger Nahe desselben mußten sich ja unendlich viele Zahlen der Folge befinden. Also würden auch unendlich viele außerhalb des Kreises anzutreffen sein. Gabe es also etwa zwei Haufungspunkte der Folge, so konnte ihr Abstand nicht mehr als $2\,\varepsilon$ betragen. ε ist aber eine positive Zahl, uber die wir frei verfugen konnen. Daher kann es nicht mehr als einen Häufungspunkt geben.

Wenn umgekehrt die Zahlenfolge einen endlichen Grenzwert z besitzt, so gibt es eine Nummer $N(\varepsilon)$, von der an $|z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2}$. Also ist von dieser Nummer an

$$|z_{n+m} - z_n| = |z_{n+m} - z + z - z_n| \leqq |z_{n+m} - z| + |z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Reihen. Die Lehre von den Zahlenfolgen ist gleichwertig mit der Lehre von den *unendlichen Reihen*. Denn man kann jede Zahlenfolge als Folge der Teilsummen einer anderen Zahlenfolge, also einer unendlichen Reihe auffassen. Ist etwa $s_1, s_2, \cdots$ die Zahlenfolge, so sind die s_n die Teilsummen der unendlichen Reihe

$$s_1 + (s_2 - s_1) + \cdots (s_n - s_{n-1}) + \cdots,$$

deren n-tes Glied $s_n - s_{n-1}$ ist. Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Teilsummen ist ja stets ein Reihenglied.

Eine Reihe heißt *konvergent*, wenn ihre Teilsummen einen endlichen Grenzwert besitzen. Ist kein endlicher Grenzwert vorhanden, so heißt die Reihe *divergent*. Dahin gehort namentlich der Fall, daß die Teilsummen einen unendlichen Grenzwert besitzen. Eine solche Reihe nennt man *eigentlich divergent*, während man die anderen auch *oszillierend* nennt.

Wie im Reellen ergibt sich aus dem allgemeinen Konvergenzprinzip als unmittelbare Folgerung die, daß der Grenzwert der Glieder einer konvergenten Reihe Null ist.

Als wichtige Folge ergibt sich weiter aus diesem Prinzip der Satz, daß *eine Reihe konvergiert, wenn die Reihe der absoluten Beträge ihrer Glieder konvergiert.* Man beweist das genau wie im Reellen folgendermaßen: Sei $u_0 + u_1 + \cdots$ die Reihe, s_n ihre Teilsummen, sei $|u_0| + |u_1| + \cdots$ die Reihe der absoluten Beträge, σ_n ihre Teilsummen. Dann wird $|s_{n+m} - s_n| = |u_{n+1} + \cdots + u_{n+m}| \leqq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots |u_{n+m}| = \sigma_{n+m} - \sigma_n < \varepsilon$ von einem gewissen von m unabhangigen n an.

3. Potenzreihen. Unter einer Potenzreihe versteht man eine Reihe der Art

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots.$$

Es gilt der Satz: Wenn

$$a_0 + a_1 z_0 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

konvergiert, so konvergiert auch

$$|a_0| + |a_1 z| + \cdots + |a_n z^n| + \cdots, \quad \text{sobald} \quad |z| < |z_0|.$$

Oder in Worten: *Wenn eine Potenzreihe an einer Stelle z_0 konvergiert, so konvergiert sie an allen Stellen von kleinerem absoluten Betrag absolut.* Es ist namlich

$$\sum a_n z^n = \sum a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n.$$

Nun sind aber die Glieder einer konvergenten Reihe beschrankt. Denn ihr Grenzwert ist Null. Es gibt also nur endlich viele, deren Betrag 1 ubertrifft. Es gibt somit eine Zahl M derart, daß fur alle n stets $|a_n z_0^n| < M$ ist. Daher konvergiert auch $\sum |a_n z^n|$. Denn es ist ja $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$.

4. Konvergenzkreis. Mit dem vorhin bewiesenen Satze, daß jede absolut konvergente Reihe selbst konvergiert, werden auch alle auf Reihen mit nicht negativen Gliedern sich beziehenden Konvergenzkriterien im komplexen Gebiet verwendbar. Dahin gehört namentlich das *Kriterium von Cauchy*, wonach $\sum |a_n z^n|$ konvergiert, sobald von einem gewissen n an fur ein festes $L < 1$ die Bedingung $\sqrt[n]{|a_n z^n|} \leqq L < 1$ erfullt ist, und daß die Reihe divergiert, sobald unendlich oft $\sqrt[n]{|a_n z^n|} \geqq 1$ bleibt.

Wir sprechen die Konvergenzbedingung in einer für unsere Zwecke geeigneteren Form aus. Wenn von einem gewissen n an $\sqrt[n]{|a_n z^n|} \leqq L < 1$ bleibt, so ist der große Häufungspunkt der Zahlenfolge $\sqrt[n]{|a_n z^n|}$ kleiner als Eins. Ist umgekehrt der große Haufungspunkt der Zahlenfolge kleiner als Eins, so gibt es eine Zahl L unter Eins von der Art, daß von einem gewissen n

an $\sqrt[n]{|a_n z^n|} \leqq L$ bleibt. Denn es gibt ja nur endlich viele Zahlen der Folge, welche den größten Häufungspunkt der Folge um mehr als ε übertreffen. Also ist jede zwischen dem größten Häufungspunkt und Eins gelegene Zahl als Zahl L brauchbar. Man bezeichnet den größten Häufungspunkt mit lim sup (limes superior) oder mit $\overline{\lim}$. Ähnlich nennt man den kleinsten Häufungspunkt lim inf (limes inferior) und schreibt auch $\underline{\lim}$. Dann kann man die Cauchysche Konvergenzbedingung dahin formulieren, daß die Potenzreihe stets dann absolut konvergiert, wenn $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} < 1$. Wir können das auch so aussprechen: Die Potenzreihe $\sum a_n z^n$ konvergiert für alle

$$|z| < \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = r$$

absolut.[1]) Ist nun aber weiter $|z| = R > r$, so kann die Potenzreihe nicht konvergieren. Denn wäre dies der Fall, so würde sie für jedes z, dessen Betrag zwischen r und R liegt, absolut konvergieren, während man doch den obigen Darlegungen entnehmen kann, daß für $|z| > r$ die Potenzreihe nicht mehr absolut konvergieren kann. Denn dann ist auch $\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} > 1$, und es gibt unendlich viele Reihenglieder, für welche $\sqrt[n]{|a_n z^n|} > 1$, also auch $|a_n z^n| > 1$ bleibt.

Durch diese Überlegungen ist nun der folgende *Satz* bewiesen.

Jede Potenzreihe $\mathfrak{P}(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$

besitzt einen Konvergenzkreis von der folgenden Eigenschaft. Für jedes z, das dem Inneren dieses Konvergenzkreises angehört, konvergiert die Reihe absolut, für jedes z außerhalb divergiert sie. Der Mittelpunkt des Kreises liegt bei $z = 0$. Sein Radius ist

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Diese Zahl nennt man auch den Konvergenzradius.

Das gilt auch für den Fall, daß der größte Häufungspunkt der Zahlenfolge $\sqrt[n]{|a_n|}$ bei Null oder bei Unendlich liegt. Denn dann ist eben auch für alle z der größte Häufungspunkt von $\sqrt[n]{|a_n|}\,|z|^n$ bei Null oder bei Unendlich gelegen, und das bedeutet im ersten Falle, daß die Potenzreihe für alle z konvergiert, also den Konvergenzradius Unendlich hat, und es bedeutet im anderen Falle, daß die Potenzreihe für von Null verschiedene z stets divergiert. Dann ist also der Konvergenzradius Null. Wir werden gleich sehen, daß alle diese Fälle wirklich vorkommen.

1) Es sei also zunächst $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ von Null und Unendlich verschieden.

Es gibt Potenzreihen, die nur bei $z = 0$ konvergieren. Dahin gehört die Reihe

$$\sum n^n z^n.$$

Denn es ist ja $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \infty$. Der Konvergenzradius ist also Null. Für $\sum z^n$ dagegen ist der Konvergenzradius Eins. Denn aus dem Reellen ist bekannt, daß diese Reihe, welche die Funktion $\frac{1}{1-z}$ darstellt, nur für alle z zwischen -1 und $+1$ konvergiert. Daher ist der Konvergenzkreis der Einheitskreis, nach den oben unter 3. festgestellten Eigenschaften der Potenzreihen. Denn um zu sehen, daß sie für ein gegebenes z vom Betrag kleiner als Eins konvergiert, nehme man ein reelles z von einem etwas größeren Betrag, der aber auch noch kleiner als Eins sei. Für dies reelle z haben wir Konvergenz. Also auch für das zu untersuchende komplexe z vom Betrag kleiner als Eins. Konvergierte aber weiter die Reihe für irgendein komplexes z von einem Betrag größer als Eins, so mußte sie auch für reelle z von einem Betrag größer als Eins konvergieren, was nicht der Fall ist. Ebenso steht es bei der Reihe $\sum \frac{z^n}{n}$, auch ihr Konvergenzkreis ist der Einheitskreis. Dagegen konvergiert die Reihe

$$\sum \frac{1}{n^n} z^n$$

überall in der ganzen Ebene, ihr Konvergenzradius ist also unendlich. Denn es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = 0$$

Ebenso konvergiert die Reihe $\sum \frac{z^n}{n!}$

in der ganzen Ebene. Es ist ja im Reellen die Reihe der Funktion e^z. Und zur Erklärung dieser Funktion im Komplexen werden wir sie bald verwenden. Da sie aber im Reellen überall konvergiert, muß dies nach der schon vorhin verwendeten Schlußweise auch im Komplexen der Fall sein. Daher ist also

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0.$$

Also konvergieren auch die Reihen

$$\sum n!\, z^n \quad \text{und} \quad \sum n^n z^n$$

nur bei $z = 0$. Die im Reellen für $\cos z$ und $\sin z$ auftretenden Reihen konvergieren natürlich auch in der ganzen komplexen Ebene.

Ein Leser, welcher nun noch ein Beispiel dafür vermißt, daß der Konvergenzradius den beliebigen endlichen Wert ϱ annehmen kann, sei auf folgende allgemeine Überlegung verwiesen. Macht man in einer Potenzreihe

vom Konvergenzradius r die Substitution $z = \frac{z}{\varrho}$, so erhält man eine nach Potenzen von z fortschreitende Potenzreihe, deren Konvergenzradius $r\varrho$ ist. Denn aus dem Glied $a_n z^n$ wird $\frac{a_n}{\varrho^n} z^n$. Also wird

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{\varrho^n}} = \frac{1}{r\varrho}.$$

Also hat namentlich die Reihe $\sum \frac{1}{\varrho^n} z^n$ den Konvergenzradius ϱ.

Dem Leser ist noch ein anderes Cauchysches Konvergenzkriterium bekannt, welches an den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Glieder anknupft. Hieran lassen sich indessen keine allgemeinen Betrachtungen über den Konvergenzradius anknüpfen, wie der Leser schon einsehen wird, wenn er nur an eine Reihe wie die fur $\sin z$ denkt, wo ja ein uber der andere Koeffizient verschwindet, der Quotient also abwechselnd null und unendlich wird. Allerdings kann man beweisen, daß aus $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = A$ auch $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = A$ folgt; aber nur in seltenen Fällen wird jener Limes existieren; immerhin liegen der lim sup und der lim inf von $\sqrt[n]{|a_n|}$ stets zwischen lim sup und lim inf von $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

5. Operationen mit Reihen. Die im Reellen bekannten Sätze uber Addition und Multiplikation zweier Reihen lassen sich ohne weiteres ins Komplexe ubertragen. Ein Leser, welcher dies nicht sofort ubersieht, sei auf die Darstellung verwiesen, welche ich furs Reelle in meinem Leitfaden der Differentialrechnung gegeben habe. Beim Durchlesen wird er merken, daß die Beweise und die Satze sich leicht ins Komplexe ubertragen lassen. Die nahere Durchfuhrung ist eine nutzliche Aufgabe fur den Leser.

Hiermit ist man nun also etwa in der Lage, zu erkennen, daß auch fur ein komplexes z von einem Betrage kleiner als Eins $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$ ist. Das sieht man wie im Reellen, wenn man die Reihe mit z multipliziert und von der eben aufgeschriebenen abzieht. Multipliziert man weiter die Reihe mit sich selbst, so sieht man, daß auch fur Komplexe z vom Betrage kleiner als Eins

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + (n+1)z^n + \cdots$$

ist. Die Darstellung anderer Funktionen durch Potenzreihen laßt sich nun allerdings nicht mehr mit derselben Einfachheit ins Komplexe ubertragen. Denn meistens sind die Funktionen im Komplexen noch gar nicht erklart, oder aber es versagen die im Reellen aus der Taylorschen Formel fließenden Beweise. Diese Fragen werden uns noch sehr eingehend spater beschäftigen.

Genau wie im Reellen beweist man auch, daß jede absolut konvergente Reihe unbedingt konvergiert, daß man also ihre Glieder beliebig umordnen kann, ohne an Konvergenz oder Summe etwas zu ändern. Umgekehrt konvergiert auch jede unbedingt konvergente Reihe absolut.

Was aber die Resultate über bedingt konvergente reelle Reihen und die durch Umstellen der Reihenglieder erreichbaren Änderungen der Summe betrifft, so liegen hier die Verhältnisse schwieriger. Erst Steinitz hat hier Klarheit geschaffen. Er hat in einer großen Arbeit im 143. Bande des Crelleschen Journals 1913 gezeigt, daß bei einer konvergenten Reihe komplexer Glieder stets einer der drei folgenden Fälle eintritt: Die durch Umstellen der Reihenglieder erreichbaren Summen machen entweder einen einzigen Punkt aus, oder sie erfüllen lückenlos eine Gerade oder sie erfüllen lückenlos die ganze Ebene. Der dritte Fall tritt also im Komplexen neu hinzu. So einfach und schön dies Ergebnis klingt, so schön ist der Beweis. Wir beschränken uns aber hier auf die bloße Erwähnung.

Dritter Abschnitt.

Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

§ 1. Der Bereichbegriff.

1. Definition des Bereiches. Unter einem *Bereich* oder einem *Gebiet*[1]) verstehen wir eine Punktmenge in der komplexen Ebene von folgender Art: 1. *Um jeden Punkt der Menge gibt es einen Kreis, welcher nur Punkte der Menge enthält.* 2. *Irgend zwei Punkte der Menge lassen sich durch einen aus endlich vielen gradlinigen Stücken bestehenden Linienzug miteinander verbinden, und zwar so, daß die sämtlichen Punkte dieses Polygonzuges der Menge angehören.* Im Sinne der ersten Bedingung liegt es, daß z. B. ein Kreisbereich nur aus den inneren Punkten des Kreises besteht, während Peripheriepunkte nicht zum Bereich hinzugerechnet werden. Die zweite Forderung besagt, daß der Bereich aus einem Stück besteht. (Fig. 7.)

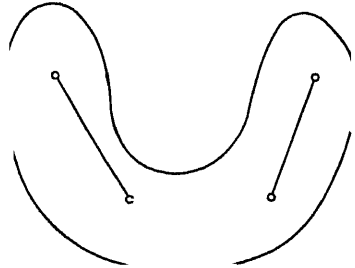



Fig 7.

1) Wir wollen also beide Wörter im gleichen Sinne verwenden, obwohl man manchmal das Wort Gebiet für das verwendet, was wir hernach abgeschlossenen Bereich nennen werden.

2. Der Rand. Die Vorstellung des *Randpunktes* wird so begrifflich gefaßt: Ein Punkt heißt Randpunkt eines Bereiches, wenn er *Häufungspunkt von Punkten des Bereiches ist, ohne doch selbst dem Bereich anzugehören,* d. h. ohne daß man um ihn einen Kreis schlagen kann, welcher nur Punkte des Bereiches enthält. Jedem um den Randpunkt geschlagenen Kreis gehören also auch Punkte an, welche nicht zum Bereich gehören. Nimmt man zu einem Bereich die Randpunkte hinzu, so erhält man eine neue Punktmenge, welche man als *abgeschlossenen Bereich*[1]) bezeichnen kann.

3. Durchmesser. Ein Bereich heißt *endlich* oder im Endlichen gelegen, wenn es einen Kreis gibt, der den Bereich umschließt. Jedem endlichen Bereich kann durch folgende Betrachtung eine endliche von Null verschiedene positive Zahl zugeordnet werden, welche sein *Durchmesser* heißt. Ich fasse irgend zwei Punkte des Bereiches ins Auge und bestimme ihren Abstand. Jedes Punktepaar besitzt so einen Abstand, der nicht größer sein kann als der Durchmesser eines um den Bereich geschlagenen Kreises. Diese Abstände besitzen also eine obere Grenze.[2]) Diese obere Grenze heißt Durchmesser des Bereiches.[3]) Es gibt kein Punktepaar im Bereich, dessen Abstand dieser oberen Grenze gleich wäre, oder mit anderen Worten, man darf den Durchmesser nicht als Maximum der Abstände erklären, denn ein solches Maximum existiert nicht, weil der Bereich keine abgeschlossene Menge ist. Man kann aber den Bereich durch Hinzunahme der Randpunkte abschließen und dann das Maximum der Abstände bestimmen. Das führt zur gleichen Zahl, weil ja doch in beliebiger Nähe eines jeden Randpunktes Bereichpunkte liegen, denn es sind ja zum Bereich nur Randpunkte hinzugekommen. Das Punktepaar aber, für das das Maximum der Abstände erreicht wird, liegt am Rande des Gebietes. Denn wären etwa P und Q die beiden Punkte, für welche das Maximum eintritt, und läge etwa P im Inneren, nicht am Rande, so gäbe es einen Kreis von Bereichpunkten um P, und man sieht klar, daß z. B. der Abstand $P'Q$ größer wäre als der als Maximum angenommene Abstand PQ (Fig. 8).

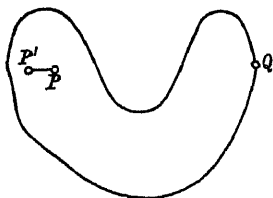



Fig. 8

1) Eine Menge von Punkten heißt abgeschlossen, wenn sie ihre Häufungspunkte enthält. Die Menge der Randpunkte eines *endlichen* Bereiches ist z. B. eine abgeschlossene Menge. Ebenso ist die aus den Bereichpunkten und den Randpunkten bestehende Menge abgeschlossen.

2) Die Menge der Abstände ist beschränkt (jeder Abstand ist kleiner als der Kreisdurchmesser). Jede beschränkte Menge besitzt aber eine obere Grenze (vgl. meinen Leitfaden der Differentialrechnung S. 33).

3) Ebenso wird der Begriff „Durchmesser" für eine beliebige Punktmenge erklärt.

4. Aufgabe. Es sei eine Folge ineinanderliegender Bereiche mit gegen Null konvergierendem Durchmesser gegeben. Es gibt einen einzigen Punkt, der dem Inneren oder dem Rand aller dieser Bereiche angehört.

§ 2. Stetige Funktionen.

1. Definition. *Die komplexe Veränderliche w ($w = u + iv$) heißt eine Funktion $f(z)$ der komplexen Veränderlichen z ($z = x + iy$), wenn gegebenen Werten von z Werte von w zugeordnet sind.* Uns interessiert namentlich der Fall, wo die gegebenen Werte von z einen Bereich — *den Definitionsbereich der Funktion* — erfüllen. Die Funktion $w = f(z)$ ist dann also in einem Bereich erklärt.

Wir schreiben (wie im Reellen)

$$\lim_{z \to a} f(z) = A,$$

wenn zu jedem positiven ε ein $\delta(\varepsilon)$ gehört derart, daß

$$|f(z) - A| < \varepsilon \quad \text{ist, sobald} \quad |z - a| < \delta(\varepsilon) \quad \text{und} \quad z \neq a.$$

Sobald also z einem Kreise vom Radius $\delta(\varepsilon)$ um a angehört und von a verschieden ist, gehört der Funktionswert $w = f(z)$ einem Kreise vom Radius ε um $w = A$ an. Ist gleichzeitig auch noch $A = f(a)$, gilt also die Beziehung

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a),$$

so heißt die Funktion *stetig* bei $z = a$. Sie heißt in einem Bereiche stetig, wenn sie an jeder Stelle des Bereiches stetig ist. Das sind alles so unmittelbare Übertragungen aus dem reellen Gebiet, daß es nicht nötig ist, länger dabei zu verweilen. Ebenso erwähnen wir nur kurz, daß Summe, Produkt und Quotient stetiger Funktionen wieder stetig sind an allen Stellen, wo der Nenner nicht verschwindet.

Alle Funktionen der komplexen Veränderlichen z lassen sich als Funktionen der beiden reellen Veränderlichen x und y ($z = x + iy$) auffassen. Nimmt $f(z)$ dazu noch nur reelle Werte an, so liegt eine reelle Funktion der beiden reellen Veränderlichen vor. Über sie möge man sich z. B. in meinem Leitfaden der Differentialrechnung näher orientieren. Hier kommen nun aber noch die Funktionen hinzu, welche auch komplexe Werte annehmen können. Gerade sie werden uns in diesem Buche vornehmlich beschäftigen. Insonderheit wird es eine besondere Art derartiger Funktionen sein, der wir unsere Aufmerksamkeit schenken werden, nämlich die differenzierbaren Funktionen.

2. Absoluter Betrag und Argument. Hier fugen wir noch ein Wort uber zwei reelle Funktionen von z an, die fur unsere Zwecke als Hilfsmittel von Wichtigkeit sind.[1]) Das sind die Funktionen

$$w = |z| = +\sqrt{z \cdot \bar{z}} = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

und

$$w = \arg z.$$

Die erste ist eindeutig, weil jede Zahl nur einen absoluten Betrag besitzt, die zweite unendlich vieldeutig, weil jeder Vektor z unendlich viele verschiedene Richtungswinkel besitzt, die sich voneinander um Vielfache von 2π unterscheiden. Beide Funktionen sind stetig, die erste durchweg, die zweite an allen Stellen außer bei $z = 0$. Denn bei Annaherung an $z = 0$ besitzt $\arg z$ keinen Grenzwert. Wohl aber existiert ein Grenzwert, wenn sich z in einer wohlbestimmten Richtung dem Punkte $z = 0$ nahert. Der Grenzwert wechselt aber mit dieser Richtung und ist jeweils ihrem Argument gleich. Wenn man z einen Kreis mit dem Mittelpunkt $z = 0$ durchlaufen laßt, so nimmt bei einmaligem vollen Umlauf im positiven Sinn $\arg z$ um 2π zu, bei n-maliger Durchlaufung um $n \cdot 2\pi$. Durchlauft aber z einen Kreis, welcher $z = 0$ ausschließt und auch die Unstetigkeitsstelle $z = 0$ nicht trifft, so kehrt bei Vollendung des Umlaufs $\arg z$ zum Ausgangswert zuruck. Denn im Ausgangspunkt kann $\arg z$ nach dem Umlauf nur einen Wert erreichen, der mit dem Ausgangswert bis auf ein Vielfaches von 2π ubereinstimmt. Da aber nun der Vektor z immer in dem Winkelraum bleibt, welchen die beiden von $z = 0$ an den Kreis gezogenen Tangenten einschließen, so kann $\arg z$ keinen Wert erreichen, der vom Ausgangswert um mehr als den Winkel der beiden Tangenten abwiche. Der ist aber sogar kleiner als π. Bei Durchlaufung eines derartigen Kreises komme ich also stets zur alten Bestimmung des $\arg z$ zurück, wahrend man bei Durchlaufung des ersten Kreises um $z = 0$ von einer Bestimmung des $\arg z$ zu jeder anderen gelangen kann. Man kann sich von diesen Dingen eine klare Vorstellung machen, wenn man sich die Fläche $w = \arg z$ in drei rechtwinkligen Raumkoordinaten w, x, y vorstellt. Es wird eine Schraubenflache mit der Ganghohe 2π, die sich um die w-Achse herumschlingt. Nur bei Umlaufung dieser Achse, also von $z = 0$, gelangt man aus einem Stockwerk der Flache in ein anderes.

Bei Funktionen einer reellen Veranderlichen bemerkt man bald, daß mit w als Funktion von z auch z als Funktion von w erklärt ist. Man kommt so zum Begriff der Umkehrungsfunktion. Sie kann eindeutig oder mehrdeutig sein. Doch kennt man den schonen Satz, daß monotone Funktionen eindeutige, gleichfalls monotone Umkehrungsfunktionen besitzen. Im Komplexen liegt

1) Auch $\Re(z)$, $\Im(z)$, $\bar{z}$ sind stetige Funktionen von z.

die Sache im allgemeinen wesentlich anders. Unsere reellen Funktionen komplexen Argumentes nehmen langs ganzen Kurven denselben Wert an, z. B. $|z|$ langs Kreisen, arg z langs Geraden durch $z = 0$. Betrachtet man also die Umkehrungsfunktion, so gehoren im allgemeinen zu jedem Wert von w unendlich viel Werte von z, die eine ganze Kurve erfullen. Diese etwas unliebsame Erscheinung wird bei der Funktionsklasse, welcher dies Buch gewidmet ist, den differenzierbaren Funktionen, nicht vorkommen. Überhaupt werden wir erkennen, daß die Differenzierbarkeit allein viel tiefer in das Wesen einer Funktion eingreift, als wir das vom Reellen her erwarten möchten.

§ 3. Reihen von Funktionen.

1. Die Sachlage. Es ist bekannt, daß eine in einem Intervall durchweg konvergente Reihe stetiger Funktionen nicht immer eine stetige Summe besitzt. In meinem Leitfaden der Integralrechnung z. B. sind derartige Beispiele im Gebiete der Funktionen einer reellen Veranderlichen betrachtet. Es sei z. B. im Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ die n-te Teilsumme

$$s_n(x) = x^n,$$

die Reihe also $\sum_n u_n(x)$ mit $u_n(x) = x^n - x^{n-1}$.

Dann ist $\lim\limits_{n \to \infty} s_n(x) = 0$, falls $0 \leqq x < 1$

und $\lim\limits_{n \to \infty} s_n(x) = 1$, falls $x = 1$.

Die Reihe konvergiert also uberall, die Glieder sind stetige Funktionen, die Summe aber ist unstetig bei $x = 1$ Im Gebiete einer komplexen Variablen kann man leicht ahnliche Beispiele bilden. So sei z. B. fur $0 \leqq |z| \leqq 1$ die n-te Teilsumme $s_n(z) = |z|^n$. Dann gilt die gleiche Schlußweise wie bei $s_n(x) = x^n$. Aber auch dies Beispiel selbst ist ja zugleich auch eines im komplexen Gebiet; denn es ist ja $x = \Re(z)$ eine stetige Funktion der komplexen Variablen z, also $s_n(z) = \{\Re(z)\}^n$. Auch wenn $s_n(z)$ eine nicht reelle Funktion der komplexen Variablen z ist, lassen sich analoge Beispiele bilden. Dahin gehört schon $s_n(z) = z^n$. Denn fur $|z| < 1$ ist $\lim\limits_{n \to \infty} z^n = 0$. Fur $z = 1$ aber ist $s_n(1) = 1$. Fur andere Werte von z auf dem Einheitskreis existiert kein Grenzwert. Aber es reicht schon aus, daß die Reihe in der aus den Punkten $|z| < 1$ und $z = 1$ bestehenden Konvergenzmenge keine stetige Summe hat.

2. Gleichmäßige Konvergenz. Somit leuchtet ein, daß noch besondere Bedingungen erfullt sein mussen, wenn die Summe einer konvergenten Reihe stetiger Funktionen selbst eine stetige Funktion sein soll. Das wichtigste, fast stets ausreichende Kennzeichen enthält der nun folgende Satz:

Eine gleichmäßig konvergente Reihe stetiger Funktionen besitzt eine stetige Summe.

Dabei heißt die Reihe $u_0(z) + \cdots + u_n(z) + \cdots$

in der Punktmenge B *gleichmäßig konvergent*, wenn sie an allen Stellen derselben konvergiert und wenn außerdem zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ *eine von z unabhängige* Zahl $N(\varepsilon)$ existiert, so daß

$$|s(z) - s_n(z)| < \varepsilon \quad \text{ist für} \quad n > N(\varepsilon) \quad \text{und beliebige } z.$$

Dabei bedeutet wieder $s_n(z)$ die n-te Teilsumme, $s(z)$ die Summe der Reihe. Diese Bedingung besagt also, daß für alle Stellen der Menge eine bestimmte Gliederzahl $N(z)$ ausreicht, um die Summe der Reihe bis auf einen Maximalfehler ε zu approximieren. Dabei ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß man an einzelnen Stellen schon mit einer geringeren Gliederzahl auskommt, jedenfalls aber braucht man an keiner Stelle mehr als $N(\varepsilon)$ Glieder. Das ist das Wesentliche an der Begriffsbildung.

Diese Bedingung war z. B. bei den obigen Beispielen von Reihen mit nicht stetiger Summe nicht erfüllt. Denn nehmen wir als Punktmenge die aus $|z| < 1$ und $z = 1$ bestehende und als $s_n(z)$ wieder z^n und betrachten namentlich auf der positiven reellen Achse den Verlauf der Annäherungen. Je näher nun der Punkt z an der Stelle 1 liegt, eine um so größere Potenz n hat man nötig, um z^n unter ε herunterzubringen. Also reicht sicher nicht mehr dasselbe n aus, um für alle $|z| < 1$ das z^n unter ε herunterzubringen. Also ist die Konvergenz nicht gleichmäßig. Ist sie dies aber, so gilt unser oben aufgestellter Satz, wonach die Reihensumme auch stetig ist.

Seien nämlich $z_0 + h$ und z_0 zwei beliebige Stellen aus der Menge gleichmäßiger Konvergenz, und sei $N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = N$ eine Gliederzahl, welche ausreicht, um überall die Reihensumme bis auf den Maximalfehler $\frac{\varepsilon}{3}$ zu approximieren. Dann haben wir für $n \geqq N$

$$\begin{aligned} |s(z_0+h)-s(z_0)| &= |s(z_0+h)-s_N(z_0+h) + s_N(z_0+h)-s_N(z_0) + s_N(z_0)-s(z_0)| \\ &\leqq |s(z_0+h)-s_N(z_0+h)| + |s_N(z_0+h)-s_N(z_0)| + |s_N(z_0)-s(z_0)| \\ &\leqq \frac{\varepsilon}{3} + |s_N(z_0+h)-s_N(z_0)| + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Nun ist aber die endliche, aus einer bestimmten Zahl $N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ von Gliedern bestehende Summe s_N eine stetige Funktion; also kann man eine Funktion $\delta(\varepsilon)$ so bestimmen, daß

$$|s_N(z_0+h) - s_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{wird für} \quad |h| < \delta(\varepsilon).$$

Also wird nun tatsächlich

$$|s(z_0+h)-s(z_0)|<\varepsilon \quad \text{für} \quad |h|<\delta(\varepsilon).$$

Die Reihensumme ist also an der Stelle z_0 stetig, wie wir beweisen wollten.

3. Anwendung auf Potenzreihen. Unter allen Reihenarten spielen in der Funktionentheorie die Potenzreihen die wichtigste Rolle. Für sie gilt der Satz:

In jedem mit ihrem Konvergenzkreis konzentrischen Kreis von kleinerem Radius konvergiert die Potenzreihe $\Sigma a_n z^n$ gleichmäßig.

Bevor wir den Satz beweisen, bemerken wir, daß man ganz und gar nicht behaupten darf, daß die Potenzreihe in ihrem ganzen Konvergenzkreis gleichmäßig konvergiert. Daß dies ein verhängnisvoller Irrtum wäre, zeigt schon die geometrische Reihe. Man kann nämlich sicher nicht mit einer festen Gliederzahl $N(\varepsilon)$ auskommen, um für alle $|z|<1$ die Reihensumme

$$\sum z^n = \frac{1}{1-z}$$

bis auf ε zu approximieren. Denn die Teilsumme

$$1+z+\cdots+z^{N(\varepsilon)}$$

hat einen Betrag, der $N(\varepsilon)+1$ nicht übertrifft, für alle $|z|\leqq 1$. Die Reihensumme selbst aber nimmt in hinreichender Nähe von $z=1$ Werte an, die $N(\varepsilon)$ um so viel übertreffen, als man nur irgend wünscht.

Um so bemerkenswerter ist es, daß der vorhin angegebene Satz richtig ist. Sei nämlich R der Konvergenzradius der Reihe, r aber der Radius desjenigen kleineren Kreises, für den wir die gleichmäßige Konvergenz nachweisen wollen. Dann wähle ich irgendeine Stelle z_0 im Inneren des von den beiden Kreisen gebildeten Ringes (Fig. 9). Nun wird in $\Sigma a_n z^n$ das n-te Glied

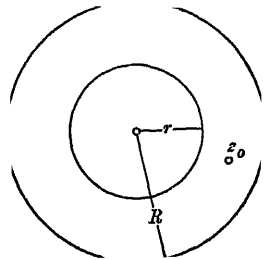



Fig 9.

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n|\left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqq |a_n z_0^n|\left|\frac{r}{z_0}\right|^n, \quad \text{sobald} \quad |z|\leqq r.$$

Bezeichnen wir nun mit $\mathfrak{P}(z)$ die n-te Teilsumme der Potenzreihe $\mathfrak{P}_n(z)$, so wird

$$|\mathfrak{P}(z)-\mathfrak{P}_n(z)| \leqq \sum_{n+1}^{\infty} |a_\varkappa z^\varkappa|.$$

Wegen der Konvergenz von $\mathfrak{P}(z_0)$ gibt es nun aber eine Zahl M, so daß für alle n stets

$$|a_\varkappa z_0^\varkappa| \leqq M$$

wird. Also wird nun

$$|\mathfrak{P}(z)-\mathfrak{P}_n(z)| \leqq M \left|\frac{r}{z_0}\right|^{n+1} \frac{1}{1-\left|\frac{r}{z_0}\right|}.$$

Daher kann man jetzt zu gegebenem ε eine Nummer $N(\varepsilon)$ so bestimmen, daß für $n > N(\varepsilon)$ dieser Ausdruck kleiner als ε wird. Da also diese Gliederzahl $N(\varepsilon)$ für alle $|z| \leqq r$ ausreicht, um die Reihensumme $\mathfrak{P}(z)$ bis auf ε zu approximieren, so ist damit die gleichmäßige Konvergenz der Reihe erkannt.

Hieraus folgt nun, daß *Potenzreihen Funktionen darstellen, welche an jeder Stelle im Inneren des Konvergenzkreises stetig sind.* Denn man kann stets einen konzentrischen Kreis von kleinerem Radius als der Konvergenzkreis angeben, welcher eine solche gegebene Stelle enthält.

4. Der Abelsche Grenzwertsatz. Dies Resultat über die Stetigkeit der Potenzreihen im Inneren des Konvergenzkreises läßt sich in gewissem Umfang auf diejenigen Stellen am *Rande* desselben übertragen, an welchen die Reihe noch konvergiert. Dies geschieht durch den *Abelschen Grenzwertsatz.* Er lautet:

Wenn die Potenzreihe $$\mathfrak{P}(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$$

in dem Punkte z_0 auf der Konvergenzgrenze konvergiert, so stellt sie eine Funktion dar, welche in jedem abgeschlossenen Dreieck stetig ist, dessen drei Ecken von diesem Punkte z_0 und zwei weiteren im Inneren des Konvergenzkreises gelegenen Punkten gebildet werden. (Mit Stetigkeit im abgeschlossenen Dreieck ist gemeint, daß die Funktion im Inneren und auf dem Rande des Dreiecks stetig ist, und zwar so, daß $\lim\limits_{z\to a} \mathfrak{P}(z) = \mathfrak{P}(a)$ ist, wenn z und a nur Punkte aus dem Dreieck oder auf seiner Grenze bedeuten.) Es wird also nicht behauptet, daß z. B. auf einem in z_0 von innen den Konvergenzkreis berührenden Kreis gleichfalls $\mathfrak{P}(z)$ dem Grenzwert $\mathfrak{P}(a)$ zustrebt. Wie man an Beispielen sehen kann, ist das auch gar nicht der Fall.

Fig 10. Fig 11.

Zum Beweise setze ich $z = z_0 \zeta$ in die Reihe ein. Dadurch entsteht aus der Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ eine Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(\zeta)$. Ihr Konvergenzkreis ist der Einheits-

kreis. Denn damit $|z| < |z_0|$ werde, muß $|\zeta| < 1$ sein.[1]) Dem Punkte $z = z_0$ entspricht der Punkt $\zeta = 1$. In ihm konvergiert die Reihe $\mathfrak{P}_1(\zeta)$. Dem Dreieck der Fig. 10 entspricht das Dreieck der Fig. 11. Es entsteht aus dem Dreieck der Fig. 10 dadurch, daß man die ganze Figur um den Kreismittelpunkt so lange dreht, bis z_0 auf die reelle Achse gelangt ist, und dann noch so lange ähnlich vergrößert bzw. verkleinert, bis der Punkt z_0 nach 1 gelangt ist. Denn es ist ja $|\zeta| = \frac{|z|}{|z_0|}$ und $\arg \zeta = \arg z - \arg z_0$. Es genügt also, für den Beweis des Abelschen Grenzwertsatzes anzunehmen, daß der Konvergenzkreis der Potenzreihe der Einheitskreis sei und daß sie im Punkte Eins konvergiere. Wir dürfen aber weiter noch annehmen, daß das Dreieck symmetrisch zur reellen Achse liegt. Denn das Dreieck der Fig. 11 kann stets in ein solches eingebettet werden[2]) (Fig. 12). Wir dürfen weiter annehmen, daß $\mathfrak{P}(1) = 0$ sei. Denn wäre dies nicht schon der Fall, so betrachten wir einfach statt $\mathfrak{P}(z)$ die Reihe $\mathfrak{P}(z) - \mathfrak{P}(1)$, die sich von der gegebenen nur im konstanten Glied unterscheidet. Beide Funktionen sind gleichzeitig stetig. Es ist aber für den Beweisgang etwas bequemer, anzunehmen, daß $\mathfrak{P}(1) = 0$ sei. Nun kommen wir zum eigentlichen Beweis. Um ihn zu erbringen, wende ich die sog. Abelsche Reihentransformation an: Es ist für $a_0 + a_1 + \cdots + a_\nu = s_\nu$

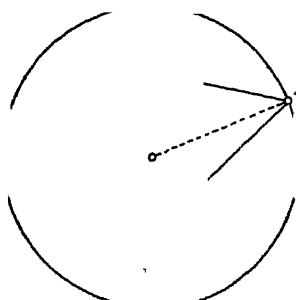
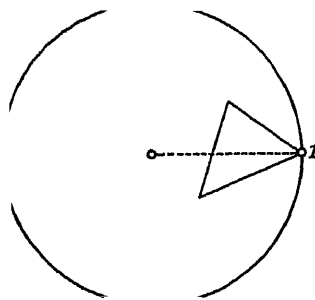
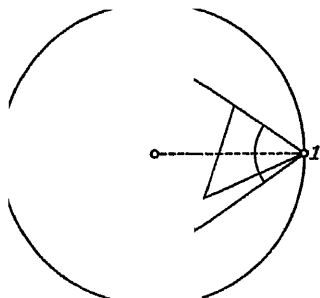



Fig 12

$$\sum_0^n a_\nu z^\nu = s_0 + \sum_1^n (s_\nu - s_{\nu-1}) z^\nu = \sum_0^{n-1} s_\nu (z^\nu - z^{\nu+1}) + s_n z^n.$$

Da aber $|z| \leqq 1$ und $\lim_{n \to \infty} s_n = \mathfrak{P}(1) = 0$ ist, so ist

$$\sum_0^\infty a_\nu z^\nu = \mathfrak{P}(z) = \sum_0^\infty s_\nu (z^\nu - z^{\nu+1}) = (1 - z) \sum_0^\infty s_\nu z^\nu,$$

ein Ergebnis, das man auch nach den Regeln der Reihenmultiplikation erhalten kann, indem man $\mathfrak{P}(z)$ mit $\frac{1}{1-z} = 1 + z + \cdots$ multipliziert. Der Konvergenzkreis der Reihe $\sum_0^\infty s_\nu z^\nu$ ist immer noch der Einheitskreis. Denn in seinem Inneren konvergieren $\mathfrak{P}(z)$ und die geometrische Reihe absolut. Also

1) Vgl. auch S. 45.

2) Wir nehmen also an, daß die Ecken des Dreieckes in nicht zu weiter Entfernung von $z = 1$ liegen. Wegen der im Inneren des Konvergenzkreises schon bewiesenen Stetigkeit von $\mathfrak{P}(z)$ ist dies für den Beweis unseres Satzes durchaus ausreichend.

ist der Konvergenzkreis mindestens so groß wie der Einheitskreis. Er kann aber auch nicht größer sein, denn da ja auch $1 - z$ eine (abbrechende) Potenzreihe (mit unendlich großem Konvergenzkreis) ist, so müßte dann

$$(1 - z)\sum s_n z^n = \mathfrak{P}(z),$$

also die ursprungliche Reihe, auch einen großeren Konvergenzkreis haben. Ich führe nun eine Hilfsnummer m ein und zerlege mit ihr die Reihe in zwei Teile, indem ich

$$(1 - z)\sum_0^{\infty} s_n z^n = (1 - z)\sum_0^m s_n z^n + (1 - z)\sum_{m+1}^{\infty} s_n z^n$$

schreibe. Ich wähle diese Hilfsnummer so groß, daß für $n > m$ stets $|s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ bleibt. Das geht an, denn die Summe der Reihenkoeffizienten, also der Grenzwert der s_n ist ja dem Wert $\mathfrak{P}(1)$ gleich und verschwindet also. Dann finde ich

$$|\mathfrak{P}(z)| \leqq |1 - z| \left|\sum_0^m s_n z^n\right| + \frac{\varepsilon}{2} \frac{|1 - z|}{1 - |z|} |z|^{m+1}.$$

Es kommt nun nur darauf an zu zeigen, daß sich der in Fig. 12 angedeutete Kreissektor, dessen Scheitel bei 1 liegt, so klein wählen läßt, daß in ihm $|\mathfrak{P}(z)| < \varepsilon$ wird. Denn in den anderen von 1 verschiedenen Punkten des Dreiecks ist ja die Stetigkeit der Reihensumme schon durch den vorigen Satz erwiesen.

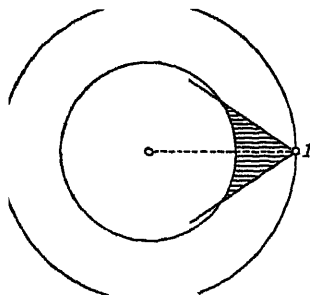



Fig. 13.

Zunachst springt unmittelbar in die Augen, daß man den Kreissektor so klein wahlen kann, daß auf dem ihm angehorigen Stuck der positiven reellen Achse die gewunschte Abschatzung gilt. Denn hier ist ja $z = |z|$. Also wird da $\frac{|1-z|}{1-|z|} = 1$, und es ist $|z|^{m+1} < 1$. Ferner liegt fur $|z| < 1$ die Summe

$$\sum_0^m s_n z^n$$

unterhalb einer festen Grenze M. Denn sie besteht aus einer von z unabhängigen Zahl von Gliedern. Daher kann man den Radius des Sektors und damit $1 - |z|$ so klein wählen, daß im ganzen Sektor, also auch auf dem ihm angehörigen Stuck der reellen Achse

$$|1 - z| \left|\sum_0^m s^n z^n\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Also ist nun tatsächlich bei *Annäherung längs der reellen Achse* $\lim\limits_{z \to 1} \mathfrak{P}(z) = 0$.

Um aber das gleiche auch für beliebige Annäherung im Dreieck einzusehen, muß auch für die anderen Punkte des hinreichend klein gewählten Sektors der Quotient $\frac{|1-z|}{1-|z|}$ abgeschätzt werden. Das gelingt auf Grund des Sekantensatzes der Planimetrie ohne weiteres. Ich beschränke z auf den Zipfel, den ein beliebig gewählter Kreis um $z=0$ von dem Dreieck abschneidet. Dieser Kreis unterliegt also nur der Bedingung, daß er die beiden von 1 ausgehenden Dreieckseiten schneidet. In Fig. 13 ist der Zipfel schraffiert. Alsdann sei z ein beliebiger Punkt des Zipfels. Ich lege durch ihn den Kreis mit $z = 0$ als Mittelpunkt (Fig. 14). (Der den Zipfel abschneidende Kreis ist in Fig. 14 punktiert.) Ferner lege ich durch z und 1 eine Gerade und ziehe noch die reelle Achse heran. Die vier Schnittpunkte dieser beiden Geraden mit dem Kreis durch z seien $A\,(=z)$, B, C, D. Dann ist nach dem Sekantensatz

Fig 14

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD.$$

Nun ist aber $\quad OA = |1-z| \quad$ und $\quad OC = 1 - |z|$.

Also wird
$$\frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{OD}{OB}.$$

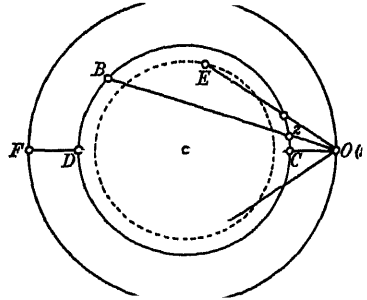
Man liest aber aus der Fig. 14 ab, daß weiter

$$\frac{OD}{OB} < \frac{OF}{OE}.$$

Bezeichnet man diese von z unabhängige Zahl mit α, so ist also für alle z des Zipfels $\frac{|1-z|}{1-|z|} < \alpha$. Von hier an schließt man dann ganz wie oben weiter, daß in einem genügend kleinen Sektor mit Mittelpunkt 1 tatsächlich $|\mathfrak{P}(z)| < \varepsilon$ wird.[1])

5. Beispiele. Wir schließen diesen Paragraphen mit einigen *Beispielen zum Abelschen Grenzwertsatz.* Für reelle $|z| < 1$ gilt die Darstellung

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \cdots.$$

1) Wie man sieht, enthält der Abelsche Grenzwertsatz eine Aussage über das Verhalten der Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. Damit haben wir ein Gebiet angeschnitten, das in der modernen Forschung einen hervorragenden Platz einnimmt.

Diese Reihe konvergiert aber auch noch bei $z = 1$. Nun ist aber

$$\lim_{z \to 1} \log(1 + z) = \log 2.$$

Daher wird
$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \cdots .$$

Ebenso findet man aus der Potenzreihe

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - + \cdots,$$

daß
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \cdots.$$

Diese Beispiele ließen sich beliebig vermehren.

Ich ziehe es vor, noch eine mehr theoretische Anwendung auf die Reihenlehre anzugeben. Es handelt sich um eine Verallgemeinerung des oben (S. 20) erwähnten Cauchyschen Satzes über Reihenmultiplikation. Danach war für zwei absolut konvergente Reihen $\sum_0^\infty u_n$ und $\sum_0^\infty v_n$

$$\sum_0^\infty u_n \sum_0^\infty v_n = \sum_0^\infty w_n, \quad \text{wo} \quad w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0 .$$

Nun zeigt sich aber, daß *stets*

$$\sum u_n \sum v_n = \sum w_n$$

ist, wofern nur die drei hier vorkommenden Reihen konvergieren. Das ergibt sich so: Wenn diese drei Reihen konvergieren, so konvergieren die drei Potenzreihen $\Sigma u_n z^n$, $\Sigma v_n z^n$, $\Sigma w_n z^n$ für $|z| < 1$ absolut nach S. 17, denn sie konvergieren ja bei $z = 1$. Daher kann man für $|z| < 1$ auf das Produkt $\Sigma u_n z^n \Sigma v_n z^n$ den Cauchyschen Multiplikationssatz anwenden. Man findet so $\Sigma w_n z^n$. Nun wenden wir den Abelschen Grenzwertsatz an und gehen zur Grenze $z \to 1$ über. Dann wird

$$\sum w_n = \lim_{z \to 1} \sum w_n z^n = \lim_{z \to 1} \sum u_n z^n \lim_{z \to 1} \sum v_n z^n = \sum u_n \sum v_n .$$

Also ist tatsächlich $\Sigma u_n \Sigma v_n = \Sigma w_n$, wenn nur alle drei Reihen konvergieren.

6. Aufgabe: I. Man beweise, ausgehend von der Abelschen Transformation, folgenden Satz: In $\mathfrak{P}(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$ seien die Koeffizienten positiv und Σa_ν sei divergent, dann gilt bei radialer Annäherung $\lim_{z \to 1} \mathfrak{P}(z) = \infty$. Der Satz gilt, wie ähnlich folgt, auch unter der allgemeineren Voraussetzung, daß die Reihe Σa_ν nur eigentlich divergent ist, d. h. daß diese Reihe nicht oszilliert. Daraus folgt: Wenn die $a_\nu \geqq 0$ sind von einer gewissen Nummer an und wenn $\lim_{z \to 1} \mathfrak{P}(z) = 0$ gilt bei radialer Annäherung $z \to 1$, so ist $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots\cdots = 0$. II. Eine geringe Änderung des Beweisganges lehrt auch die gleichmäßige Konvergenz von $\mathfrak{P}(z)$ in dem Dreieck des Grenzwertsatzes.

§ 4. Differenzierbare Funktionen.

1. Definition. Unter genauer Übertragung der im Reellen üblichen Erklärung nennen wir eine eindeutige Funktion $f(z)$ an der Stelle z_0 *differenzierbar,* wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

existiert. Er heißt dann Differentialquotient und wird mit $\frac{df}{dz}$ oder $f'(z)$ bezeichnet.

Der Umstand, daß diese Erklärung mit der im Reellen üblichen völlig gleichlautend ist, bringt es mit sich, daß sich eine Reihe von Differentiationsregeln aus dem reellen Gebiete ohne weiteres übertragen lassen. Dahin gehören die Regeln über die Ableitung einer Summe, einer Differenz, eines Produktes, eines Quotienten. So sind also z. B. die rationalen Funktionen differenzierbare Funktionen, und es gelten genau die aus dem Reellen bekannten Regeln. Mit der Differentiation von trigonometrischen Funktionen und dergleichen muß man allerdings noch vorsichtig sein, denn wir haben von der Erklärung dieser Funktionen im komplexen Gebiete noch nicht geredet. Sie wird durch Potenzreihen geschehen. Aber die können wir noch nicht differenzieren. Wir werden es aber bald lernen. Durch die im Reellen übliche Schlußweise erkennt man auch hier, *daß eine an der Stelle z_0 differenzierbare Funktion daselbst auch stetig ist.* Denn wenn der obige Grenzwert existieren soll, so muß notwendig der Zähler $f(z_0+h)-f(z_0)$ mit h gegen Null streben, und das bringt die Stetigkeit zum Ausdruck. Aus

$$\text{(A)} \qquad \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - f'(z_0) = \eta$$

mit $|\eta| < \varepsilon$ folgt nämlich

$$|f(z_0+h)-f(z_0)| = |hf'(z_0)+\eta h| \leqq |h|\,|f'(z_0)| + \varepsilon\,|h|,$$

was mit $|h|$ zusammen gegen Null strebt.

2. Kettenregel. Die Gleichung (A) setzt uns auch instand, ähnlich wie im Reellen die *Kettenregel* für die Differentiation mittelbarer Funktionen zu beweisen. Es möge nämlich $\varphi(w)$ in der Umgebung von $w = w_0$ eindeutig sein. Außerdem sei $\varphi(w)$ an der Stelle w_0 differenzierbar. Ferner sei $w = f(z)$ in der Umgebung von $z = z_0$ eindeutig. Es sei außerdem $f(z)$ bei z_0 differenzierbar, und es sei $f(z_0) = w_0$. *Dann ist $F(z) = \varphi\{f(z)\}$ bei z_0 differenzierbar, und es ist $F'(z_0) = \varphi'(w_0) f'(z_0)$.* Wegen der Differenzierbarkeit von $\varphi(w)$ hat man nämlich

$$\lim_{\Delta w \to 0} \frac{\varphi(w_0+\Delta w)-\varphi(w_0)}{\Delta w} = \varphi'(w_0),$$

d. h. es ist $$\frac{\varphi(w_0+\Delta w)-\varphi(w_0)}{\Delta w} = \varphi'(w_0) + \varepsilon(\Delta w),$$

wo $\lim_{\Delta w \to 0} \varepsilon(\Delta w) = 0$ gilt. Multipliziert man diese Gleichung mit Δw, so wird sie

(B) $$\varphi(w_0 + \Delta w) - \varphi(w_0) = \Delta w \cdot \varphi'(w_0) + \Delta w \cdot \varepsilon(\Delta w),$$

und diese Gleichung ist offenbar auch fur $\Delta w = 0$ richtig. Nach dieser Vorbereitung betrachten wir den Differenzenquotienten

$$\frac{F(z_0+\Delta z)-F(z_0)}{\Delta z} = \frac{\varphi[f(z_0+\Delta z)]-\varphi[f(z_0)]}{\Delta z}.$$

Trägt man $$f(z_0) = w_0, f(z_0 + \Delta z) = w_0 + \Delta w$$

ein, so wird er $$\frac{\varphi(w_0+\Delta w)-\varphi(w_0)}{\Delta z}.$$

Nach Gleichung (B) kann man hierfur schreiben

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}\varphi'(w_0) + \frac{\Delta w}{\Delta z}\varepsilon(\Delta w).$$

Da nun $$\lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) \quad \text{und} \quad \lim_{\Delta w \to 0}\varepsilon(\Delta w) = 0$$

ist, so existiert auch der

$$\lim_{\Delta z \to 0}\frac{\varphi(w_0+\Delta w)-\varphi(w_0)}{\Delta z} = \varphi'(w_0)f'(z_0),$$

und damit ist die Kettenregel bewiesen.

Bemerkung: Ganz ebenso beweist man folgenden Satz: $\varphi(w)$ genüge denselben Voraussetzungen wie eben. Ferner sei jetzt $w = f(t)$ eine Funktion der *reellen* Variablen t, die in der Umgebung von $t = t_0$ eindeutig erklart sei. Ferner sei $w_0 = f(t_0)$, und es sei $f(t)$ bei $t = t_0$ differenzierbar. Dann ist auch $F(t) = \varphi\{f(t)\}$ bei $t = t_0$ differenzierbar, und man hat $F'(t_0) = \varphi'(w_0)f'(t_0)$.

Ganz ähnlich beweist man die folgende Ubertragung eines allgemeineren Satzes der Differentialrechnung: $f(w_1, w_2)$ sei für $|w_1 - b_1| < r_1$, $|w_2 - b_2| < r_2$ eine eindeutige stetige Funktion der beiden Veranderlichen w_1 und w_2. Außerdem sollen die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial w_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial w_2}$ für die genannten Werte von w_1 und w_2 existieren und stetig sein. Des weiteren seien $\varphi_1(z)$ und $\varphi_2(z)$ zwei fur $|z - a| < r$ eindeutige stetige Funktionen, die gleichfalls differenzierbar seien. Weiter sei $\varphi_1(a) = b_1$, $\varphi_2(a) = b_2$ und es sei $|\varphi_1(z) - b_1| < r_1$, $|\varphi_2(z) - b_2| < r_2$ fur $|z - a| < r$. Dann ist auch

$$F(z) = f\{\varphi_1(z), \varphi_2(z)\}$$

in $|z - a| < r$ eindeutig, stetig und differenzierbar, und es gilt

$$F'(z) = \frac{\partial f}{\partial w_1}\{\varphi_1(z), \varphi_2(z)\}\varphi_1'(z) + \frac{\partial f}{\partial w_2}\{\varphi_1(z), \varphi_2(z)\}\varphi_2'(z).$$

Der Beweis wird dem Leser an Hand der vorhergehenden Darlegungen nach dem Muster des entsprechenden Beweises im reellen Gebiet nicht schwer fallen. Die Verallgemeinerung auf mehr als zwei Variable ergibt sich ebenso.

3. Umkehrungsfunktion. Nun zur Differentiation der Umkehrungsfunktionen. Hier machen wir folgende Annahme. $w = f(z)$ soll in der Umgebung von $z = z_0$ eindeutig und stetig sein. Es sei $f(z)$ in z_0 differenzierbar. Weiter sei $w_0 = f(z_0)$. Endlich sei $f'(z_0) \neq 0$. Für eine gewisse Umgebung von $w = w_0$ besitze die Gleichung

$$w = f(z)$$

nur eine Lösung $z = \varphi(w)$, die der Umgebung von z_0 angehört. $\varphi(w)$ sei also in der Umgebung von $w = w_0$ eine eindeutige und außerdem stetige Funktion. Dann ist $\varphi(w)$ bei w_0 differenzierbar, und es ist

$$\varphi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Der Beweis verläuft genau wie im Reellen. Die weitgehenden Voraussetzungen mußten gemacht werden, weil wir von der Existenz der Umkehrungsfunktion noch nicht geredet haben. Wir werden aber später (S. 195) sehen, daß für Funktionen, die *in der Umgebung* von $z = z_0$ differenzierbar sind, einige Voraussetzungen sich als Folge der übrigen ergeben.

4. Nirgends differenzierbare stetige Funktionen. Leichter als im Reellen ist es hier, *nirgends differenzierbare stetige Funktionen* anzugeben. Hier wie dort zieht nämlich die Stetigkeit die Differenzierbarkeit nicht nach sich. Schon die Funktion $w = \Re(z)$ zeigt dies. Denn wenn wir $h = h_1 + i h_2$ setzen, so wird $\frac{\Re(z+h) - \Re(z)}{h} = \frac{h_1}{h}$. Dieser Quotient besitzt aber für $h \to 0$ keinen Grenzwert. Denn es gibt beliebig kleine Werte $|h|$, für die $h_1 = 0$ ist, für die also der Ausdruck verschwindet, und es gibt beliebig kleine Werte von $|h|$, nämlich $h_2 = 0$, für welche der Ausdruck den Wert Eins annimmt. Nirgends also ist diese Funktion differenzierbar. Ebenso ist es bei $w = x + y$.[1]) Hier wird der Differenzenquotient

$$\frac{h_1 + h_2}{h_1 + i h_2}.$$

Dies hat aber für $h \to 0$ keinen Grenzwert, wie man sieht, wenn man einmal $h_1 = 0$ und ein andermal $h_2 = 0$ setzt. Es kann also eine Funktion komplexen Argumentes sehr wohl partielle Ableitungen nach x und nach y besitzen, ohne nach z differenzierbar zu sein.

5. Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen. Wir wollen daher die Bedingungen aufsuchen, die für Real- und Imaginärteil bestehen müssen,

1) Wie immer, so sei auch hier $z = x + iy$ gesetzt.

wenn $f(z)$ differenzierbar sein soll. Ich setze dazu $w = f(z) = u + iv$, so daß also $u(x, y)$ und $v(x, y)$ stetige Funktionen bedeuten. Diese Funktionen sind, wie wir zunächst zeigen wollen, mit partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ versehen. Zur Abkürzung werde ich dafur gewohnlich u_x, u_y, v_x, v_y schreiben. Es ist ja $f(z)$ nach x und nach y differenzierbar, weil doch $z = x + iy$ ist und $f(z)$ nach z differenzierbar ist.[1] Ebenso ist aber die konjugierte Funktion $\bar{f}(z)$ nach x und y differenzierbar. Also auch $v = \frac{f + \bar{f}}{2}$ und $v = \frac{f - \bar{f}}{2i}$. Weiter wird[1]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} = i\,\frac{df}{dz}$$

Also ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\,\frac{\partial f}{\partial y},$$

oder

$$u_x + iv_x = -iu_y + v_y.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Diese zwischen Real- und Imaginärteil einer differenzierbaren Funktion bestehenden Relationen sind unter dem Namen *Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen* bekannt. Ferner wird also $f'(z) = u_x + iv_x = -i(u_y + iv_y)$.

Nimmt man an, daß diese Ableitungen selbst wieder stetige nach x und nach y stetig differenzierbare Funktionen sind — wir werden spater (S. 135) zeigen, daß dies stets der Fall ist —, so findet man durch Differentiation der ersten Gleichung nach x und der zweiten nach y, daß $u_{xx} = v_{xy}$ und daß $u_{yy} = -v_{xy}$. Daraus findet man durch Addition $u_{xx} + u_{yy} = \Delta u = 0$. Ebenso findet man, daß auch $\Delta v = 0$. *Real- und Imaginärteil sind also Potentialfunktionen.* So nennt man nämlich Funktionen, welche der Gleichung $\Delta u = 0$ genugen.

Wenn der Realteil einer differenzierbaren Funktion gegeben ist, so erlauben es die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, den zugehorigen Imaginarteil zu finden. Denn sie geben uns ohne weiteres die Ableitungen des Imaginarteiles an. Soll es wirklich eine Funktion mit gegebenen Ableitungen geben, so muß die Integrabilitatsbedingung erfullt sein, welche zum Ausdruck bringt, daß $(v_x)_y = (v_y)_x$. Diese Integrabilitatsbedingung bedeutet aber wieder wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nur, daß u eine Potentialfunktion ist. Durch die Angabe des Realteiles ist also auch der Imaginärteil bis auf eine additive Konstante (Integrationskonstante) bestimmt.

1) Wie wir feststellten, bleibt ja die Kettenregel uber die Differentiation mittelbarer Funktionen auch im komplexen Gebiet bestehen.

6. Analytische Funktionen. Die differenzierbaren Funktionen sind es nun, welchen dies Werk gewidmet ist. Sie tragen noch einen zweiten Namen. Gewohnlich nennt man sie *analytische Funktionen.*

Beispiele analytischer Funktionen liefern uns, wie schon gesagt, zunächst die rationalen Funktionen.

Ein weiteres wichtiges Beispiel analytischer Funktionen sind die durch *Potenzreihen* dargestellten Funktionen. Es gilt nämlich der Satz:

In ihrem Konvergenzkreis stellt jede Potenzreihe eine analytische Funktion dar.

Wir beweisen zunächst, daß die durch gliedweises Differenzieren der gegebenen Reihe $\mathfrak{P}(z) = \Sigma a_n z^n$ entstehende Reihe $\mathfrak{P}_1(z) = \Sigma n a_n z^{n-1}$ denselben Konvergenzkreis besitzt. Alsdann zeigen wir weiter, daß die Reihe $\mathfrak{P}(z)$ differenzierbar ist, und daß $\mathfrak{P}_1(z)$ ihre Ableitung ist.

Sei also z_0 irgendeine Stelle im Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}(z)$ und z_1 eine weitere Stelle aus demselben Kreise von größerem absolutem Betrage. Wir wollen die Konvergenz von $\mathfrak{P}_1(z)$ in z_0 aufweisen. Wegen der Konvergenz von $\mathfrak{P}(z_1)$ gibt es jedenfalls eine Zahl M derart, daß fur alle n der Betrag $|a_n z_1^{n-1}| < M$ ist. Nun kann aber das n-te Glied von $\mathfrak{P}_1(z_0)$ in der Form

$$n a_n z_1^{n-1}\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^{n-1}$$

geschrieben werden. Daher ist sein Betrag kleiner als

$$nM\left|\frac{z_0}{z_1}\right|^{n-1}.$$

Die Reihe mit dem absoluten Glied

$$nM\left|\frac{z_0}{z_1}\right|^{n-1}$$

konvergiert aber. Denn es ist ja $\left|\frac{z_0}{z_1}\right| < 1$, und wir haben auf S. 20 schon gesehen, daß $\Sigma n z^{n-1}$ im Einheitskreis konvergiert. Die Summe ist ja $\frac{1}{(1-z)^2}$. Daher konvergiert die Reihe $\mathfrak{P}_1(z)$ fur alle Stellen des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}(z)$. Wir benutzen $\mathfrak{P}_1(z)$ zugleich zur Bezeichnung ihrer Summe Der Konvergenzkreis dieser Reihe ist also mindestens so groß wie der von $\mathfrak{P}(z)$. Daß er nicht großer sein kann, leuchtet, nebenbei bemerkt, sehr leicht ein. Denn betrachtet man die im selben Kreis konvergente Reihe $z\mathfrak{P}_1(z)$, so sind ihre Glieder ja dem Betrage nach großer als die Glieder von $\mathfrak{P}(z)$. Also konvergiert letztere Reihe uberall da, wo die erste absolut konvergiert.

Wir haben nun weiter zu zeigen, daß $\mathfrak{P}(z)$ differenzierbar ist.

Mit Herrn von Stachó, dem ich den nachstehenden, gegenuber der ersten Auflage wesentlich abgekurzten Beweisgang verdanke, schließe ich nun so:

r sei der Konvergenzradius von $\Sigma a_n z^n$ und von $\Sigma n a_n z^{n-1}$. Ich wähle die Stelle z, an der die Differenzierbarkeit bewiesen werden soll, und die Nachbarstelle $z + h$ aus dem Kreis $|z| \leqq \varrho < r$, $|z + h| \leqq \varrho < r$. Dann ist

$$\frac{\mathfrak{P}(z+h) - \mathfrak{P}(z)}{h} = \sum a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h}.$$

Nun ist aber

$$\left|\frac{(z+h)^n - z^n}{h}\right| = \left|(z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}\right|$$
$$\leqq n\varrho^{n-1}.$$

Daher ist die Reihe $$\sum a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h}$$

wegen der Konvergenz von $$\sum |a_n| n\varrho^{n-1}$$

gleichmaßig konvergent hinsichtlich h, sofern nur $|z| \leqq \varrho$, $|z + h| \leqq \varrho$ ist. Nach S. 25 stellt sie daher eine stetige Funktion in h dar. Insbesondere gilt daher fur $h \to 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathfrak{P}(z+h) - \mathfrak{P}(z)}{h} = \sum a_n n z^{n-1}.$$

Also ist $\mathfrak{P}(z)$ differenzierbar, und man gewinnt die Ableitung durch gliedweises Differenzieren.

7. Taylorsche Reihen. Alle durch Potenzreihen dargestellten Funktionen sind also analytisch. Dies Beispiel analytischer Funktionen ist darum von so besonderer Wichtigkeit, weil wir bald sehen werden, daß man jede analytische Funktion in eine Potenzreihe entwickeln kann. Damit wird dann auch gezeigt sein, daß eine analytische Funktion beliebig oft differenziert werden kann, daß sie Ableitungen aller Ordnungen besitzt. Denn die durch die erste Differentiation erhaltene Potenzreihe kann man ja ein zweites, ein drittes Mal usw. differenzieren. Ist a irgendeine Stelle aus einem Bereich B, in welchem $f(z)$ analytisch ist, so kann man um $z = a$ als Mittelpunkt einen dem Bereich angehörigen Kreis schlagen. In diesem ist, wie wir später zeigen werden, $f(z)$ in Form einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(z - a)$ darstellbar. Daß aber diese Entwicklung hochstens auf eine Weise geleistet werden kann, läßt sich jetzt schon einsehen. Wir konnen nämlich die Koeffizienten von $\Sigma a_n z^n$ durch die Summe $f(z)$ darstellen. Zunächst ist ja sicher $f(0) = a_0$. Weiter aber wird

$$f'(z) = \sum n a_n z^n,$$

also $$a_1 = f'(0).$$

Ebenso wird $$f''(z) = \sum n(n-1) a_n z^{n-2},$$

also $$a_2 = \frac{f''(0)}{2!}.$$

Allgemein findet man $$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Alle Potenzreihen sind also Taylorsche Reihen.

Durch denselben Gedankengang kann man, wie im Reellen, den binomischen Lehrsatz fur ganze positive Exponenten beweisen. Denn man sieht ohne weiteres, wenn man in Gedanken ausmultipliziert, daß sich $(a + z)^n$ in der Form $a^n + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ muß schreiben lassen. Differenziert man hier ein oder mehrere Male nach z und setzt dann $z = 0$, so findet man $a_1 = n a^{n-1} \cdots a_\varkappa = \binom{n}{\varkappa} a^{n-\varkappa} \cdots$. So hat man den binomischen Satz fur ganze positive Exponenten ins Komplexe ubertragen.

8. Bemerkungen zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Wir kehren nochmals zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen zurück. Wir haben oben festgestellt, daß Real- und Imaginarteil einer analytischen Funktion diesen Gleichungen genugen müssen. Nun legen wir uns noch die Frage vor, ob das die einzigen Bedingungen sind, welchen ein Funktionenpaar genugen muß, welches als Realteil und als Imaginärteil einer analytischen Funktion soll aufgefaßt werden konnen. In Gött. Nachr. 1923 hat Hr. Looman bewiesen, daß $f(z) = u + iv$ analytisch ist, wenn es in einem Bereich eindeutig und stetig ist, wenn an jeder Stelle desselben die partiellen Ableitungen erster Ordnung von u und v existieren, und den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genugen. Wir wollen hier den Satz unter der weiteren Annahme beweisen, daß jene partiellen Ableitungen stetig sind. Dann wird namlich

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{u(x+h_1, y+h_2)-u(x,y)}{h} + i\,\frac{v(x+h_1, y+h_2)-v(x,y)}{h} \qquad (h = h_1 + i h_2)$$

Wenden wir hier den Mittelwertsatz auf u und auf v an, so wird dies

$$= \frac{u_x(x+\vartheta h_1, y+\vartheta h_2)\,h_1 + u_y(x+\vartheta h_1, y+\vartheta h_2)\,h_2}{h}$$
$$+\, i\,\frac{v_x(x+\vartheta' h_1, y+\vartheta' h_2)\,h_1 + v_y(x+\vartheta' h_1, y+\vartheta' h_2)\,h_2}{h}.$$

Beachten wir nun die Stetigkeit der Ableitungen und bezeichnen mit $\varepsilon(h)$ und $\varepsilon_1(h)$ zwei Funktionen, die mit h gegen Null streben, so konnen wir dies so schreiben

$$= \frac{u_x(x,y)h_1 + u_y(x,y)h_2}{h} + i\,\frac{v_x(x,y)h_1 + v_y(x,y)h_2}{h} + \varepsilon(h)\frac{h_1}{h} + \varepsilon_1(h)\frac{h_2}{h}.$$

Beachten wir nun die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, so wird dies

$$= u_x \frac{h_1 + i h_2}{h} + i v_x \frac{h_1 + i h_2}{h} + \varepsilon(h)\frac{h_1}{h} + \varepsilon_1(h)\frac{h_2}{h}$$
$$= u_x + i v_x + \varepsilon(h)\frac{h_1}{h} + \varepsilon_1(h)\frac{h_2}{h}.$$

Nun ist also nur noch zu zeigen, daß $\varepsilon(h)\frac{h_1}{h}$ und $\varepsilon_1(h)\frac{h_2}{h}$ für $h \to 0$ den Grenzwert Null besitzen. Dazu überzeugen wir uns nur noch davon, daß $\left|\frac{h_1}{h}\right| \leqq 1$ und daß $\left|\frac{h_2}{h}\right| \leqq 1$. Dies ist selbstverständlich, weil

$$\frac{h_1}{h} = \cos \arg h$$

$$\frac{h_2}{h} = \sin \arg h.$$ [1]

Aufgabe: Man beweise mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, daß eine in einem Bereich differenzierbare nicht durchweg konstante Funktion nicht lediglich reelle Werte annehmen kann.

§ 5. Konforme Abbildung.

1. Winkeltreue. Hier wollen wir einen ersten Einblick in die durch analytische Funktionen vermittelten Abbildungen gewinnen. Sei $w = f(z)$ die Funktion. Läßt man dann z in seiner Ebene irgendeine Punktmenge durchlaufen und markiert jedesmal in der w-Ebene die entsprechenden, von der Funktion angenommenen Werte, so erhält man auch da eine Punktmenge, die wir das Bild der Punktmenge in der z-Ebene nennen. Wir sagen, sie gehe aus dieser Abbildung vermöge der Abbildungsfunktion $w = f(z)$ hervor. Ich betrachte nun insbesondere zwei Kurven $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$, welche sich in einem Punkte z_0 schneiden. $z = z_1(t)$ und $z = z_2(t)$ mit $0 \leqq t \leqq 1$ seien ihre Parameterdarstellungen.[2] $t = 0$ möge in beiden Fällen den Punkt $z = z_0$ liefern. Beide Funktionen sollen stetig sein und für $t = 0$ von Null verschiedene Ableitungen besitzen. Es ist leicht, die Winkel zu bestimmen, welche die Kurven gegen die x-Achse bilden. Zu diesem Zwecke orientieren wir beide Kurven, indem wir ihnen einen Durchlaufungssinn in Richtung wachsender Parameter geben. Legen wir dann durch den Punkt z_0 vom Parameter $t = 0$ und einen Punkt $z_0 + \Delta z$ vom Parameter $t = \Delta t > 0$ eine Sehne und geben ihr als Richtung die von z_0 nach $z_0 + \Delta z$, so wird ihr Winkel gegen die x-Achse $\arg \Delta z = \arg \frac{\Delta z}{\Delta t}$, denn $\arg \Delta t = 0$, weil $\Delta t > 0$ ist. Also werden die Winkel der in die Kurvenrichtung weisenden Tangente $\arg z_1'(0)$ und $\arg z_2'(0)$. Also wird der $\sphericalangle(\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_1) = \arg z_2' - \arg z_1' = \arg \frac{z_2'}{z_1'}$. Die Gleichungen der Bild-

1) Auch geometrisch leuchtet dies sofort ein, weil die Zahlen $\frac{h}{h_1}$ und $\frac{h}{h_2}$ auf den Tangenten an den Einheitskreis in den Punkten 1 und i liegen.

2) In dieser Form fassen wir also die beiden Gleichungen $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$ zusammen: $z = x + iy = x_1(t) + iy_1(t) = z_1(t)$ $z(t)$ bedeutet eben eine Funktion des reellen Argumentes t, die auch komplexe Werte annehmen kann.

kurven $\mathfrak{C}_2'$, $\mathfrak{C}_1'$ in der w-Ebene werden $w_1 = f(z_1(t))$ und $w_2 = f(z_2(t))$. Also wird ihr

$$\sphericalangle(\mathfrak{C}_2', \mathfrak{C}_1') = \arg \frac{w_2'(0)}{w_1'(0)} = \arg \frac{df}{dz} \cdot z_2'(0) - \arg \frac{df}{dz} z_1'(0) = \arg \frac{z_2'(0)}{z_1'(0)}.$$

Dazu ist aber vorauszusetzen, daß $f'(z_0) \neq 0$ ist, denn sonst wäre $w_1'(0) = 0$ und $w_2'(0) = 0$, und dann wären die Argumente wieder unbestimmt. Also haben wir das *Ergebnis, daß die Bildkurven denselben Winkel einschließen wie die ursprünglichen Kurven, und zwar denselben Winkel nicht nur der Größe nach, sondern auch dem Drehsinn nach.* Wenn man also $\mathfrak{C}_1$ um ω in positivem Sinne zu drehen hat, um sie in $\mathfrak{C}_2$ überzuführen, so hat man auch die Bildkurve $\mathfrak{C}_1'$ um ω in positivem Sinne zu drehen, um sie in $\mathfrak{C}_2'$ überzuführen. Wir haben so den Satz:

Die durch analytische Funktionen vermittelten Abbildungen sind winkeltreu an allen Stellen, wo ihre Ableitung nicht verschwindet.[1])

2. Streckentreue. Wir betrachten weiter die Bogenlangen s von $\mathfrak{C}$ und S von $\mathfrak{C}'$. Dann wird

$$\frac{dS}{ds} = \frac{dS}{dt} : \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{u'^2 + v'^2}}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \left|\frac{dw}{dt}\right| : \left|\frac{dz}{dt}\right| = \left|\frac{dw}{dz}\right|.$$

Demnach hangt also der Differentialquotient $\frac{dS}{ds}$ nicht von der besonderen durch z_0 gelegten Kurve ab. Er hat fur $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ denselben Wert $\left|\frac{dw}{dz}\right|$. Er hangt nur von der Lage des Punktes z_0 ab. Es werden also gewissermaßen alle Bogenlangen im Punkte z_0 im gleichen Verhaltnis verkürzt oder gestreckt. Das meinen wir, wenn wir sagen:

Die durch analytische Funktionen vermittelten Abbildungen sind streckentreu.

Winkeltreue und Streckentreue faßt man in die Aussage zusammen, daß unsere Abbildungen konform, das heißt in den kleinsten Teilen ahnlich sind. Denn sie haben mit den Ahnlichkeitstransformationen die Winkeltreue und die Streckentreue gemeinsam, nur daß bei den Ahnlichkeitstransformationen das Streckenverhältnis vom Ort unabhängig ist, während es hier mit der Lage des Punktes variiert und also nur in einem hinreichend kleinen Flachenstück *annähernd* als konstant angesehen werden kann.

3. Winkeltreue Abbildungen. Wir behandeln nun die *umgekehrte Frage,* inwieweit die winkeltreuen Abbildungen und inwieweit die streckentreuen Abbildungen auch umgekehrt alle durch analytische Funktionen vermittelt werden. Es leuchtet zunächst ein, daß bei der Streckentreue die Frage zu

1) Daß an Stellen verschwindender Ableitung die Winkeltreue aufhört, lehrt schon das Beispiel $w = z^2$ bei $z = 0$. Denn da ist $\arg w = 2 \arg z$. Genaueres über solche Vorkommnisse bleibt späterer Darlegung vorbehalten.

verneinen ist. Denn auch die durch $w = \bar{z}$ vermittelte Abbildung ist streckentreu. Das ist nämlich der Übergang von einer Figur zu ihrem Spiegelbild an

der reellen Achse (Fig. 15). Dabei bleiben alle Längen erhalten, der Drehsinn der Winkel wird aber umgekehrt. Wir werden aber beweisen können, daß eine jede streckentreue Abbildung entweder winkeltreu ist oder doch wenigstens die *Größe* der Winkel erhält, sie also lediglich umlegt. Eine streckentreue Abbildung also, welche auch den Drehsinn unverändert läßt, ist winkeltreu.

Fig 15.

Wir behandeln zunächst die winkeltreuen Abbildungen. Seien wieder $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ zwei Kurven, $\mathfrak{c}_1'$ und $\mathfrak{c}_2'$ ihre Bilder. Dann soll $\arg \frac{z_2'}{z_1'} = \arg \frac{w_2'}{w_1'}$ sein. Führen wir Real- und Imaginärteil ein, so wird dies

$$\arg \frac{x_2' + i y_2'}{x_1' + i y_1'} = \arg \frac{u_x x_2' + u_y y_2' + i(v_x x_2' + v_y y_2')}{u_x x_1' + u_y y_1' + i(v_x x_1' + v_y y_1')}.$$

Daher müssen die beiden unter dem Argument stehenden Ausdrücke bis auf einen reellen positiven Faktor λ einander gleich sein. So finden wir

$$(1) \qquad \frac{u_x x_2' + u_y y_2' + i(v_x x_2' + v_y y_2')}{u_x x_1' + u_y y_1' + i(v_x x_1' + v_y y_1')} = \lambda \frac{x_2' + i y_2'}{x_1' + i y_1'}$$

Dieser Ansatz setzt voraus, daß weder z_1' noch z_2' und daß weder w_1' noch w_2' verschwinden. Sonst wird ja das Argument unbestimmt. Die Voraussetzung, daß die Ableitungen w_1' oder w_2' nicht verschwinden, bedeutet, daß die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

im Schnittpunkt beider Kurven von Null verschieden ist. Denn es ist ja z. B.

$$w_1' = u_x x_1' + u_y y_1' + i(x_x x_1' + v_y y_1').$$

Soll das verschwinden, so müssen

$$u_x x_1' + u_y y_1' = 0$$

und

$$v_x x_1' + v_y y_1' = 0$$

sein. Das sind zwei lineare Gleichungen zwischen x_1' und y_1', also zwischen zwei Zahlen, die nicht beide verschwinden. Also muß die Funktionaldeterminante verschwinden, wie angegeben.

Ist aber diese Determinante nicht Null, so ist unser Vorgehen in Ordnung. Man setze nun in der Gleichung (1)

$$x_2' = 1 \quad y_2' = 0$$

$$x_1' = 0 \quad y_1' = 1.$$

Dabei möge λ, das ja noch von x_1', x_2', y_1', y_2' abhängen könnte, den Wert μ erhalten. Dann wird

$$\frac{u_x + i v_x}{u_y + i v_y} = \frac{\mu}{i}.$$

Daraus folgt
$$u_x = \mu v_y$$
$$\mu u_y = - v_x.$$

Tragt man dies in die Gleichung (1) ein, so wird sie wegen $v_y - i u_y \neq 0$

$$\frac{\mu x_2' + i y_2'}{\mu x_1' + i y_1'} = \lambda \frac{x_2' + i y_2'}{x_1' + i y_1'}.$$

Also muß
$$\frac{\mu x_2' + i y_2'}{\mu x_1' + i y_1'} \cdot \frac{\overline{x_1' + i y_1'}}{x_2' + i y_2'}$$

positiv reell sein. Multipliziert man aus, so sieht man, daß

$$\frac{\mu x_1' x_2' - y_1' y_2' + i(x_1' y_2' + \mu x_2' y_1')}{\mu x_1' x_2' - y_1' y_2' + i(\mu x_1' y_2' + x_2' y_1')}$$

positiv reell sein muß. Da aber die Realteile im Zähler und Nenner gleich sind und nicht immer verschwinden, so folgt, daß

$$x_1' y_2' + \mu x_2' y_1' = \mu x_1' y_2' + x_2' y_1'$$

ist. Daher ist
$$(1 - \mu)(x_1' y_2' - x_2' y_1') = 0.$$

Deshalb muß $\mu = 1$ sein. Denn μ ist von den x_1', x_2', y_1', y_2' unabhangig und die zweite Klammer verschwindet nicht fur alle x_1', x_2', y_1', y_2'.

Also gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y, \; v_x = - u_y$$

stets dann, wenn die Funktionen $u = u(x, y)$ und $v = v(x, y)$ eine nicht verschwindende Funktionaldeterminante besitzen und eine winkeltreue Abbildung vermitteln. Zieht man nun den S. 39 erwahnten Loomanschen Satz heran, oder setzt man die partiellen Ableitungen als stetig voraus, so ergeben die Betrachtungen am Schluß des vorigen Paragraphen, daß u und v Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion $w = u + iv = f(z)$ sein mussen. Da weiter die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen zeigen, daß die Funktionaldeterminante $u_x v_y - u_y v_x = u_y^2 + v_y^2 = u_x^2 + v_x^2$ wird, dieser Wert aber nach S. 36 mit dem Werte $|f'(z)|^2$ ubereinstimmt, so haben wir folgendes Schlußresultat: *Eine jede winkeltreue Abbildung wird durch eine analytische Funktion nicht verschwindender Ableitung vermittelt, wofern man nur voraussetzt, daß die partiellen Ableitungen der Abbildungsfunktionen [stetig sind und] eine nichtverschwindende Determinante besitzen.*

4. Streckentreue Abbildungen. Wir kommen nun zu den *streckentreuen* Abbildungen und wollen zeigen, daß sie, abgesehen von einer Umlegung

der Winkel, winkeltreu sind. Wieder soll die Funktionaldeterminante von Null verschieden sein. Wir setzen jetzt voraus, daß $\frac{dS}{ds}$ nur von der Stelle z_0, nicht von der besonderen Kurve abhängt, deren Bogenlänge wir betrachten. Nun wird aber

$$\left|\frac{dS}{ds}\right|^2 = \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = (u_x^2 + v_x^2)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2(u_x u_y + v_x v_y)\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + (u_y^2 + v_y^2)\left(\frac{dy}{ds}\right)^2.$$

Das soll nun von $\frac{dx}{ds}$ und $\frac{dy}{ds}$ unabhängig sein, während noch die Relation $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$ besteht. Nehme ich insbesondere $\frac{dx}{ds} = 1$ und $\frac{dy}{ds} = 0$, so kommt $u_x^2 + v_x^2$ heraus. Wähle ich aber $\frac{dx}{ds} = 0$ und $\frac{dy}{ds} = 1$, so erhalte ich $u_y^2 + v_y^2$. Beide müssen einander gleich sein. Also finde ich

$$u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2. \tag{2}$$

Daher wird nun der ganze Ausdruck

$$u_x^2 + v_x^2 + 2(u_x u_y + v_x v_y)\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}.$$

Soll er also von $\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}$ unabhängig sein, so muß noch

$$u_x u_y + v_x v_y = 0 \tag{3}$$

sein. Multipliziere ich nun (2) mit u_y^2 und entnehme aus (3) $u_x^2 u_y^2 = v_x^2 v_y^2$ und trage dies in (2) ein, so habe ich $v_x^2(u_y^2 + v_y^2) = u_y^2(u_y^2 + v_y^2)$. Da aber wegen des Nichtverschwindens der Funktionaldeterminante $u_y^2 + v_y^2$ nicht verschwinden kann, so liefert dies $v_x^2 = u_y^2$. Also ist entweder $u_y = -v_x$ oder $u_y = v_x$. Trage ich das eine oder das andere in die Gleichung

$$u_x u_y + v_x v_y = 0$$

ein, so finde ich, daß entweder

$$u_x = v_y,\ u_y = -v_x,$$

oder daß

$$u_x = -v_y,\ u_y = v_x$$

sein muß. Das erste sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen; dann ist also die Abbildung winkeltreu. Das zweite dagegen bedeutet Umlegung der Winkel, da ja in diesem Falle für

$$f(z) = u - iv$$

die Abbildung winkeltreu ist.

Aber auch diese nur streckentreuen Abbildungen kann man mit analytischen Funktionen in Zusammenhang bringen, wofern man die Ableitungen als stetig vorausgesetzt. Denn dann ist in einem ganzen Bereich, in welchem

voraussetzungsgemäß die Funktionaldeterminante nicht verschwindet, entweder durchweg das erste Cauchy-Riemannsche Gleichungspaar erfüllt oder durchweg das zweite.[1]) Da aber auch $w = \bar{z}$ eine Umlegung der Winkel liefert, so kann ich eine jede Abbildung mit Umlegung der Winkel dadurch erhalten, daß ich erst die Spiegelung $w = \bar{z}$ ausführe und dann die gespiegelte Figur winkeltreu abbilde. Eine jede streckentreue mit stetigen ersten Ableitungen versehene Abbildung wird also entweder durch eine analytische Funktion von z: $w = f(z)$, oder durch eine analytische Funktion von z: $w = f(\bar{z})$ geliefert.

Vierter Abschnitt.

Studium einiger spezieller Funktionen.

§ 1. Ganze lineare Funktionen.

Ganze lineare Funktionen werden durch einen Ausdruck der Form $w = az + b$ dargestellt. Dabei bedeuten a und b von z unabhangige Zahlen. Als spezielle Fälle sind darunter die folgenden drei Typen enthalten: $w = Rz$ mit positiv reellem R, ferner $w = \alpha z$ mit $|\alpha| = 1$, endlich $w = z + b$. Die erste führt jeden Punkt in einen anderen vom gleichen Argument in der R-fachen Entfernung vom Nullpunkt über. Deuten wir also w und z in derselben Ebene oder, anders ausgedrückt, legen wir die w-Ebene so auf die z-Ebene, daß Punkte mit gleichen w und z aufeinander zu liegen kommen, so führt diese Abbildung jede Figur in eine ähnliche zu ihr ähnlich gelegene über. Die Winkeltreue dieser Abbildung, die man auch *Streckung* nennt, springt in die Augen.

Die zweite Abbildung bewirkt eine *Drehung* der z-Ebene um den Winkel $\arg \alpha$ im positiven Drehsinn. Sie führt also jede Figur in eine kongruente über. Hier ist ja $|w| = |z|$ und $\arg w = \arg z + \arg \alpha$.

Die letzte Abbildung endlich bedeutet eine *Parallelverschiebung* der Figuren der z-Ebene in Richtung des Vektors b um seinen Betrag. Denn man erhält ja die Werte w, indem man zu den z-Werten die Zahl b addiert.

Die allgemeine Abbildung $w = az + b$ kann auf diese drei Typen zurückgeführt werden. Betrachten wir zunächst $w = R\alpha z$ mit $R > 0$ und $|\alpha| = 1$, so ist dies offenbar eine Kombination der Drehung und der Streckung. Also werden alle Figuren in R-mal so große übergeführt, welche außerdem gegen die Ausgangslage um den Winkel $\arg \alpha$ gedreht erscheinen. Der Punkt

1) Denn ein Wechsel beider Gleichungspaare kann nur da eintreten, wo alle Ableitungen verschwinden.

$z = 0$ ist dabei Drehpunkt und Ähnlichkeitszentrum. Die Abbildung heißt auch *Drehstreckung*.

Zu den hier betrachteten, durch ganze lineare Funktionen vermittelten Abbildungen gehoren auch die Drehstreckungen, deren Zentrum nicht $z = 0$, sondern ein anderer Punkt A der z-Ebene ist. Denn eine solche druckt sich in der Form $w - A = a(z - A)$ aus, wird also gleichfalls durch eine ganze lineare Funktion vermittelt. Auf diese Gestalt kann man nun aber jede beliebige ganze lineare Funktion $w = az + b$ bringen, falls $a \neq 1$ ist. Denn man muß nur A so wählen, daß $A - aA = b$ wird. Man muß also $A = \frac{b}{1-a}$ setzen. *Demnach ist für $a \neq 1$ die durch $w = az + b$ vermittelte winkeltreue Abbildung eine Drehstreckung, welche den Punkt $z = \frac{b}{1-a}$ festlaßt. $a = 1$ liefert eine Parallelverschiebung.*

Es wird eine nutzliche Ubung fur den Leser sein, die hier gefundenen Ergebnisse mit den Resultaten zu vergleichen, welche ihm von der Koordinatentransformation in der analytischen Geometrie her gelaufig sind. Bei Trennung von Real- und Imaginarteil wird man volle Übereinstimmung feststellen. Man hat so hier noch eine bequeme Herleitung jener gelaufigen Formeln gewonnen. In der Tat stecken ja in unserer geometrischen Deutung der komplexen Zahlen alle Grundvoraussetzungen der analytischen Geometrie der Ebene.

Schon im nächsten Paragraphen werden wir sehen, daß durch (gebrochene) lineare Funktionen nicht allein die Bewegungen und Streckungen zum Ausdruck kommen, sondern daß auch gewisse Abbildungen und Transformationen, die man in der Geometrie erst bei den quadratischen Verwandtschaften betrachtet, sich nach Einfuhrung komplexer Zahlen durch lineare Funktionen ausdrucken lassen.

§ 2. $w = \frac{1}{z}$.

1. Übergang zur Inversion. $w = \frac{1}{z}$ ist die einfachste gebrochene lineare Funktion. Die durch sie vermittelte Abbildung ubersieht man am besten, wenn man Polarkoordinaten einführt. Sei also

$$w = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \quad \text{und} \quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Dann wird
$$\varrho = \frac{1}{r}, \ \vartheta = -\varphi$$

der Ausdruck der Abbildung. Man kann diese Abbildung in zwei Schritten ausfuhren. Der erste möge den Betrag ungeändert lassen und zu $\vartheta = -\varphi$ führen. Das ist also die Abbildung $w_1 = \bar{z}$. Der zweite möge umgekehrt

das Argument ungeandert lassen und zum reziproken Betrag fuhren. Das ist also die Abbildung $w = \frac{1}{\bar{w}_1}$. Die erste ist weiter nichts als die uns schon (S. 42) bekannte Spiegelung an der reellen Achse, die zweite nennt man *Spiegelung am Einheitskreis, oder Transformation durch reziproke Radien,* oder auch *Inversion.* Ihr analytischer Ausdruck in Polarkoordinaten ist ja $\varrho = \frac{1}{r}$, $\vartheta = \varphi$. Weil die Ausfuhrung beider nacheinander eine winkeltreue Abbildung liefert und weil die Spiegelung $\vartheta = -\varphi$ die Winkel umlegt, gibt auch die Transformation durch reziproke Radien eine Umlegung der Winkel. Wie man durch geometrische Konstruktion zu jedem Punkt P oder P' den reziproken P' oder P finden kann, veranschaulicht die Fig 4 auf S. 11. Da Dreieck OTz' bei T rechtwinklig ist, so wird ja nach dem Kathetensatz $1 = Oz \cdot Oz'$.

2. Inversion. Die Inversion laßt die Punkte der Peripherie des Einheitskreises einzeln fest und vertauscht das Innere des Einheitskreises mit seinem Außeren. Es ist leicht festzustellen, in welcher Weise ein von zwei Kreisbogen $r = r_1$ und $r = r_2$ und zwei Geraden $\varphi = \varphi_1$ und $\varphi = \varphi_2$ begrenztes Kreisbogenviereck in das Kreisbogenviereck, begrenzt von $\varrho = \frac{1}{r_1}$ und $\varrho = \frac{1}{r_2}$, sowie von $\vartheta = \varphi_1$ und $\vartheta = \varphi_2$ ubergeht. Daraus entnimmt man allgemein, daß die Inversion und damit auch die Abbildung $w = \frac{1}{z}$ jedes Gebiet wieder in ein Gebiet uberfuhrt. Wir nennen diese Eigenschaft der Abbildung *Gebietstreue.* Wir werden diese Eigenschaft spater ganz allgemein bei allen analytischen Funktionen nachweisen.

Daß bei der Inversion die Winkel, abgesehen vom Drehsinn, ungeandert bleiben, kann man auch leicht direkt einsehen. Man hat nur zu bemerken, daß ein jeder Kreis, welcher zwei inverse Punkte verbindet, durch die Inversion in sich ubergefuhrt wird. Denn er besteht aus lauter Paaren inverser Punkte. Diejenigen Punkte desselben namlich, welche auf demselben Durchmesser des Einheitskreises liegen, sind nach dem Sekantensatz zueinander invers $(OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = 1)$. Legt man namentlich von O aus die Tangenten an den Kreis, so muß auch das Quadrat ihrer Länge gleich Eins sein. Daraus ergibt sich sofort, daß jeder Kreis, welcher zwei inverse Punkte verbindet, den Einheitskreis senkrecht durchsetzt (Fig. 16).

Umgekehrt sind natürlich auch die beiden Punkte, in welchen ein Durchmesser von K einen zu K orthogonalen Kreis schneidet, in bezug auf K invers. Das folgt sofort aus dem Sekantentangentensatz.

Um nun die Winkeltreue der Inversion zu erkennen, betrachte ich zwei Kreise durch die beiden inversen Punkte. Sie gehen durch die Inversion einzeln

in sich über, und man erkennt leicht, daß die in der Fig. 17 angegebenen beiden Winkel einander entsprechen. Sie sind aber, abgesehen vom Drehsinn, einander gleich.

Wir wollen hiermit unsere Betrachtungen über die Inversion abschließen und uns der Funktion $w = \frac{1}{z}$ zuwenden. Für die Winkeltreue ihrer Abbildung enthalten ja nun die voraufgegangenen Zeilen einen direkten Beweis.

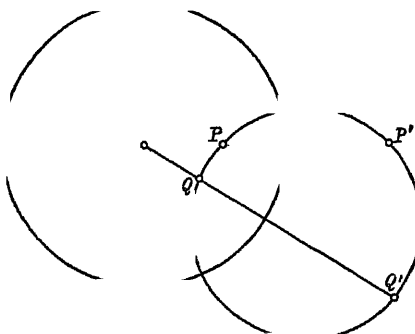
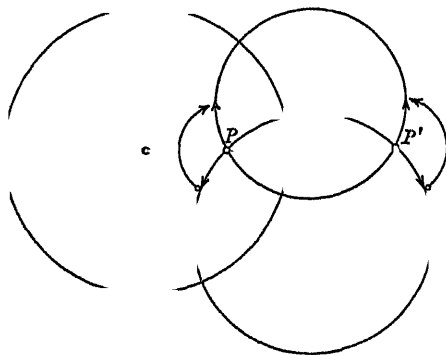



Fig 16 Fig 17.

3. $w = \frac{1}{z}$. Die Abbildung $w = \frac{1}{z}$ vertauscht gleichfalls Inneres und Äußeres des Einheitskreises, laßt aber seine Punkte nicht einzeln fest. Vielmehr sind die einzigen festen Punkte auf dem Einheitskreis, wie überhaupt in der ganzen Ebene, die Punkte $z = \pm 1$. Denn tatsachlich sind dies die einzigen komplexen Zahlen, welche mit ihren reziproken identisch sind. Denn für jede solche Zahl muß $z^2 = 1$ sein.

Die Abbildung $w = \frac{1}{z}$ führt das Innere des Kreises $|z| = 1$ in das Äußere des Kreises $|w| = 1$ über, und umgekehrt geht durch ihre Vermittlung das Äußere des Kreises $|z| = 1$ in das Innere des erstgenannten $|w| = 1$ über. Im übrigen ist die Abbildung umkehrbar eindeutig. Damit ist gemeint, daß jeder Punkt z einen einzigen Bildpunkt $w = \frac{1}{z}$ hat, und daß jeder Punkt w einen einzigen Originalpunkt $\frac{1}{w}$ besitzt. Eine Ausnahme macht nur der Punkt $z = 0$ bzw. $w = 0$. Er besitzt weder ein Bild noch ein Original. Das ist ein Schönheitsfehler, dem wir abhelfen wollen.

4. Der uneigentliche Punkt. Das geschieht durch Einführung eines *uneigentlichen Punktes*. Man nennt ihn auch den *unendlichfernen Punkt der Ebene* und bezeichnet ihn mit ∞. Wir haben es nun völlig in der Hand, festzusetzen, welcher Punkt Originalpunkt von $w = 0$ und welcher Bildpunkt

von $z = \infty$ sein soll, ja, es steht nichts im Wege, zu diesem Zweck noch weitere uneigentliche Punkte einzufuhren. Wollen wir dies aber vermeiden und wollen wir dazu erreichen, daß die Abbildung $w = \frac{1}{z}$ in der durch Hinzunahme von ∞ erweiterten Ebene umkehrbar eindeutig ist, so bleibt nur ubrig festzustellen, daß ∞ Bildpunkt und Originalpunkt von $z = 0$ zugleich sein soll. Setzen wir aber dies fest, so ist in der Tat $w = \frac{1}{z}$ eine in der ganzen (erweiterten) Ebene umkehrbar eindeutige Abbildung.

Wir setzen weiter fest, daß wir unter einer *Umgebung des Punktes* ∞ *das durch* $w = \frac{1}{z}$ *vermittelte Bild einer Umgebung von* 0 verstehen wollen. Wir verabreden weiter, zu sagen, eine *Zahlenfolge besitze den Haufungspunkt* ∞, oder ∞ sei der Grenzwert einer Zahlenfolge, *wenn* 0 *Haufungspunkt* oder Grenzwert *der Folge der reziproken Zahlen ist. Eine Funktion* $f(z)$ *nennen wir bei* ∞ *stetig oder analytisch, wenn die Funktion* $f\left(\frac{1}{w}\right)$ *bei* $w = 0$ *stetig oder analytisch ist.* Zwei Kurven schließen bei $z = \infty$ den Winkel α ein, wenn ihre durch $w = \frac{1}{z}$ erhaltenen Bilder sich bei $w = 0$ unter dem Winkel α schneiden. Wir sagen weiter, *eine Funktion* $f(z)$ *werde an einer Stelle* $z = a$ *unendlich, oder sie habe dort einen* P o l, *wenn die reziproke Funktion* $\frac{1}{f(z)}$ *für* $z \to a$ *den Grenzwert Null hat.*[1])

Der Nutzen, den die Einfuhrung dieses uneigentlichen Punktes fur die ganze Funktionentheorie bringt, kann nicht hoch genug veranschlagt werden.

Die hier gegebene rein begriffliche Einfuhrung des unendlichfernen Punktes kann durch *stereographische Projektion* geometrisch veranschaulicht werden. Wir fuhren zu diesem Zweck noch ein rechtwinkliges Koordinatensystem in einem x, y, ζ Raum ein. Wir denken uns eine Kugel vom Radius 1, welche die komplexe Ebene im Kreis $|z| = 1$ schneidet. Den Punkt $(0, 0, 1)$ nennen wir Nordpol der Kugel und machen ihn zum Zentrum einer Zentralprojektion, durch die wir die komplexe Ebene auf die Kugel abbilden. In der Tat trifft ja jede Gerade durch den Nordpol und einen (endlichen) Punkt der Ebene die Kugel außer im Nordpol noch in einem bestimmten Punkt, und das soll der Bildpunkt sein. Daß die so erklarte Abbildung eine umkehrbare eindeutige

1) Damit ist es offenbar gleichbedeutend, zu sagen: $f(z)$ wird für $z \to a$ unendlich, wenn $\left|\frac{1}{f(z)}\right|$ für $z \to a$ gegen Null strebt. Liegt es doch auch ganz im Sinne unserer Erklarungen, daß $z \to \infty$ gleichbedeutend ist mit $|z| \to \infty$ Man wird weiter sagen, $f(z)$ werde für $z \to \infty$ selbst ∞, wenn $\frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} \to 0$ strebt für $z \to 0$.

Abbildung der eigentlichen Punkte der Ebene auf die vom Nordpol verschiedenen Kugelpunkte herstellt, leuchtet ein. Es liegt daher nahe, den Nordpol selbst als Bild des uneigentlichen Punktes aufzufassen, so daß dann die ganze Ebene umkehrbar eindeutig auf die volle Kugel abgebildet erscheint.

Wir werden diese sogenannte stereographische Projektion am Ende dieses Paragraphen noch etwas näher studieren. Sie besitzt sehr schöne Eigenschaften. Vorab jedoch wollen wir die Funktion $w = \frac{1}{z}$ nun weiter betrachten.

5. Kreisverwandtschaft. Wir wollen zunächst feststellen, daß diese Abbildung eine *Kreisverwandtschaft* ist, d. h. daß sie das System der Geraden und Kreise der z-Ebene in das System der Geraden und Kreise der w-Ebene überführt. Man sieht nämlich leicht, daß man die Gleichung eines jeden Kreises und einer jeden Geraden auf die Form

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0 \quad (a, c \text{ reell})$$

bringen kann. Eine Gerade liegt dabei dann vor, wenn a verschwindet. In rechtwinkligen Koordinaten x und y ist nämlich $a(x^2 + y^2) + 2b_1 x + 2b_2 y + c = 0$ die allgemeine Gleichungsform von Geraden und Kreisen. Geraden kommen für $a = 0$ heraus. Trägt man $x^2 + y^2 = z\bar{z}$, $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ und $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ ein,

so hat man $$az\bar{z} + b_1(z + \bar{z}) + b_2\left(\frac{z-\bar{z}}{i}\right) + c = 0$$

oder $$az\bar{z} + z(b_1 - ib_2) + \bar{z}(b_1 + ib_2) + c = 0,$$

und setzt man $b_1 - ib_2 = b$, so wird dies

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0.$$

Tragen wir nun hier $z = \frac{1}{w}$ ein, so finden wir als Gleichung der Bildkurven $a + b\bar{w} + \bar{b}w + cw\bar{w} = 0$. Das sind aber wieder Geraden und Kreise. Geraden liegen vor, wenn $c = 0$ ist, d. h. wenn der betr. Kreis der z-Ebene durch $z = 0$ hindurchgeht. Also liefern Geraden und Kreise durch $z = 0$ stets Geraden der w-Ebene. Beliebige Geraden der z-Ebene, die $z = 0$ nicht treffen, liefern Kreise durch $w = 0$. Alle Kreise indessen, die $z = 0$ fernbleiben, gehen in Kreise der w-Ebene über. Diese Verhältnisse lassen es gerechtfertigt erscheinen, die Geraden als Kreise durch ∞ aufzufassen.

Zwei Kreise, welche sich im Nullpunkt berühren, gehen durch die Abbildung $w = \frac{1}{z}$ in zwei Geraden über, die sich im Endlichen nicht treffen, die also parallel sind. Umgekehrt werden parallele Geraden in Kreise übergeführt, die sich nur im Nullpunkt treffen, sich also da berühren. Daraus ergibt sich namentlich, daß der sichelförmige Bereich der Fig. 18a durch die Abbildung $w = \frac{1}{z}$ in den Streifen der Fig. 18b übergeführt wird.

Auf die Bedeutung der Inversion für die Peaucelliersche Geradführung und für die sogenannten Mascheronischen Konstruktionen — das sind Konstruktionen mit dem Zirkel allein — sowie überhaupt auf die Bedeutung der Inversion als geometrisches Übertragungsprinzip kann hier nur hingewiesen werden. Die nähere Durchführung gehört in die Geometrie.

6. Stereographische Projektion. In der komplexen Ebene seien zwei inverse Punkte gegeben. Wir wollen die gegenseitige Lage ihrer Bildpunkte auf der Kugel feststellen. Dies kann man bequem aus Fig. 19 ablesen. Sie stellt einen Schnitt dar, den wir uns durch die ζ-Achse und die Projektionsstrahlen nach den beiden inversen Punkten P und P_1 gelegt denken. Die Winkel α_1, $\alpha_2 (= \sphericalangle OSP')$ und α_3 sind einander gleich. Denn Dreieck SNP' ist bei P' rechtwinklig, und daher ergänzen α_3 und α_2 denselben Winkel zu $\frac{\pi}{2}$. Ferner sind OP_1N und ONP ähnliche Dreiecke. Denn es ist ja $1 = OP \cdot OP_1$, oder $\frac{1}{OP_1} = \frac{OP}{1}$. Daher ist nun auch $\alpha_1 = \alpha_3$. Da aber ersichtlich auch $\sphericalangle OSP_1 = \sphericalangle ONP_1$ ist, so ist auch $\sphericalangle OSP_1 = \sphericalangle OSP'$. Daher liegen also die Punkte S, P_1 und P' auf einer geraden Linie, die mit der Geraden $NP_1P'_1$ gleichgeneigt ist. *Daher liegen die Bilder inverser Punkte auf einer zur ζ-Achse parallelen Kugelsehne.*

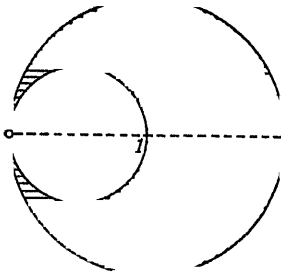
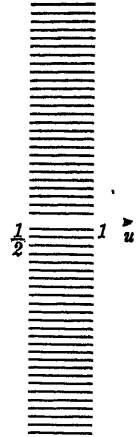



Fig 18a

Fig 18b

Fig 19

Ebenso kann man sich die gegenseitige Lage der Bildpunkte zweier, in der komplexen Ebene reziproken Punkte veranschaulichen. Man hat ja nur eine Spiegelung an der reellen Achse hinzuzunehmen. Der entspricht aber eine Spiegelung an der (x, ζ)-Ebene. Um also aus einem Kugelpunkt P' das Bild des reziproken zu erhalten, hat man nur von P' ein Lot auf die reelle Achse zu fällen und bis zum Schnitt mit der Kugel zu verlängern.

Es ist noch von Interesse, die Originalpunkte diametral gegenüberliegender

Kugelpunkte P und Q aufzusuchen. Das sind Punkte von reziprokem, absolutem Betrag und von Argumenten, die sich um π unterscheiden. Demnach gehen sie durch die Abbildung $w = -\frac{1}{\bar{z}}$ auseinander hervor. Die nähere Durchfuhrung sei dem Leser als Aufgabe gestellt.

Die stereographische Projektion ist eine winkeltreue Abbildung. Die Bilder zweier ebenen Kurven schließen also den gleichen Winkel ein wie diese selbst. Um das einzusehen, mussen wir nur beachten, daß die projizierende Ebene einer Kurventangente die Tangente der Bildkurve aus der Tangentialebene der Kugel ausschneidet. Hat man also zwei Kurven durch z_0, so legen wir durch ihre beiden Tangenten in z_0 die projizierenden Ebenen und bringen diese mit der Tangentialebene an die Kugel im Bilde von z_0 zum Schnitt. Um zu erkennen, daß die beiden so erhaltenen Geradenpaare den gleichen Winkel einschließen, haben wir in Fig. 20 den Schnitt durch die ζ-Achse und den projizierenden Strahl nach z_0 veranschaulicht. Wir haben dann lediglich zu zeigen, daß die Winkel α_1 und α_2 einander gleich sind. Denn dann gehen die beiden Geradenpaare durch Spiegelung an einer durch t gehenden, auf der Zeichenebene senkrechten Ebene auseinander hervor. Nun sind aber die Winkel α_2 und α_3 gleich, weil sie beide β zu $\frac{\pi}{2}$ ergänzen. α_1 und α_3 dagegen sind gleich als Peripheriewinkel uber dem gleichen Bogen.

Fig 20

Durch die stereographische Projektion entsprechen den Kreisen und Geraden der komplexen Ebene die Kreise der Kugel.[1]) Denn die Gleichung der Kugel wird

$$x^2 + y^2 + \zeta^2 = 1,$$

und die Gleichung des projizierenden Kegels eines ebenen Kreises wird

$$x^2 + y^2 + 2ax(\zeta - 1) + 2by(\zeta - 1) + c(\zeta - 1)^2 = 0.$$

Daher liegt die Schnittkurve beider in der durch Subtraktion erhaltenen Flache

$$(1 - \zeta^2) + 2ax(\zeta - 1) + 2by(\zeta - 1) + c(\zeta - 1)^2 = 0.$$

1) Auch geometrisch ist der Beweis leicht zu erbringen. Siehe z. B. M. Großmann, Darstellende Geometrie, Leipzig 1915, S 47/48.

Diese zerfällt aber in die Ebene $\zeta = 1$, die im Nordpol berührt, und eine Ebene

$$1 + \zeta - 2ax - 2by + c(1 - \zeta) = 0.$$

Daß umgekehrt die Kugelkreise wieder ebene Kreise liefern, erkennt man daraus, daß in der letzten Gleichung alle Ebenen enthalten sind, die nicht durch N gehen. Die Kreise durch den Nordpol selbst aber gehen in die geraden Linien der komplexen Ebene über.

§ 3. Die allgemeine lineare Funktion.

1. Die Abbildung ist umkehrbar eindeutig. Die Funktion

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

hängt nur dann von z wirklich ab, ist also nur dann keine Konstante, wenn Zähler und Nenner einander nicht proportional sind. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist die, daß die Determinante $ad - bc$ nicht verschwindet. Dies wollen wir weiterhin annehmen. Zähler und Nenner der linearen Funktion können dann also nicht gleichzeitig verschwinden.

Die Funktion $w = \frac{az + b}{cz + d}$ ist eine eindeutige analytische Funktion überall da, wo der Nenner nicht verschwindet. Eine besondere Betrachtung ist nur im Unendlichfernen nötig. Nach den Festsetzungen des vorigen Paragraphen hat man dazu die Funktion

$$w\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a + bz}{c + dz} \quad \text{bei} \quad z = 0$$

zu betrachten. Wenn also c nicht verschwindet, d. h. wenn keine ganze lineare Funktion vorgelegt ist, so ist sie auch bei ∞ noch analytisch und hat da den endlichen Grenzwert $\frac{a}{c}$. Ist aber $c = 0$, so wird der Grenzwert ∞. Wir wollen dann sagen, sie habe bei ∞ einen einfachen Pol. Ein einfacher Pol liegt auch an der Stelle $-\frac{d}{c}$ vor, wo der Nenner verschwindet. Wir wollten nämlich (vgl. S. 49) stets sagen, eine Funktion $f(z)$ besitze an einer Stelle α einen Pol, wenn die reziproke Funktion $\frac{1}{f(z)}$ an dieser Stelle den Grenzwert Null hat, während $f(z)$ und $\frac{1}{f(z)}$ in der Umgebung der Stelle durchweg eindeutig und analytisch sind. Da nun aber bei unserer nichtkonstanten linearen Funktion Zähler und Nenner nicht gleichzeitig verschwinden können, so ist tatsächlich die reziproke Funktion bei $-\frac{d}{c}$ Null. An einer Polstelle besitzt also die Funktion den Grenzwert ∞. Wir wollen sogar sagen, sie nehme da den Wert ∞

an. Diese Verabredung rechtfertigt sich, wenn wir jetzt die Umkehrungsfunktion betrachten. Eine einfache Rechnung liefert

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Man sieht also, daß die Umkehrungsfunktion wieder eine lineare Funktion ist. Ihr Nenner verschwindet gerade an der Stelle $\frac{a}{c}$, die wir als Wert von $w(z)$ bei $z = \infty$ gefunden hatten. Alles in allem erkennen wir so, *daß eine lineare Funktion eine umkehrbar eindeutige winkeltreue Abbildung der vollen z-Ebene auf die volle w-Ebene leistet.* Es ist uns bequemer, wieder w und z als Koordination verschiedener Punkte derselben Ebene zu deuten, so daß wir es also mit einer Abbildung der z-Ebene auf sich zu tun haben. Den Verlauf dieser Abbildung wollen wir uns nun etwas näher ansehen. Man kann dazu die Bemerkung verwerten, daß man die allgemeine lineare Abbildung durch mehrere nacheinander ausgeführte Abbildungen der in den vorigen Paragraphen betrachteten Arten gewinnen kann. Doch ist es zweckmäßiger, einen anderen Weg einzuschlagen.

2. Es gibt höchstens zwei Punkte, welche bei der Abbildung festbleiben. Denn für einen endlichen solchen Punkt muß

$$z = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{oder} \quad cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

sein. Die festbleibenden Punkte, *Fixpunkte* genannt, welche also einer quadratischen Gleichung genügen, will ich mit A und B bezeichnen und für $c \neq 0$

$$A = \frac{a - d + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}, \quad B = \frac{a - d - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}$$

setzen. Das sind im allgemeinen zwei verschiedene Punkte. Sie fallen in einen einzigen zusammen, den ich dann mit A bezeichnen will, wenn $(a-d)^2 + 4bc = 0$ ist. Dann sage ich, es liege eine *parabolische* lineare Funktion vor. Die in den vorigen Paragraphen betrachteten Funktionen besaßen alle außer der Parallelverschiebung zwei verschiedene Fixpunkte. Nur diese hatte als einzigen Fixpunkt ∞. Das führt uns zu der Bemerkung, daß man den Punkt Unendlich noch stets darauf zu untersuchen hat, ob er Fixpunkt sein kann oder nicht. Diese Frage beantwortet sich aber leicht dahin, daß dies nur bei ganzen linearen Funktionen, und zwar da stets eintritt. Denn wenn das c des Nenners nicht verschwindet, so nimmt die Funktion bei ∞ einen endlichen Wert $\frac{a}{c}$ an. Ist aber die Funktion ganz, so verwandelt sich die quadratische Gleichung der Fixpunkte in eine lineare, so daß dann also höchstens noch ein einziger endlicher Fixpunkt hinzukommt. Gar kein endlicher Fixpunkt tritt bei der

ganzen linearen Funktion $w = az + b$ dann und nur dann auf, wenn $a = 1$ ist, also eine Parallelverschiebung vorliegt.

3. Das System der Geraden und Kreise der komplexen Ebene geht in sich über. Genau wie im vorigen Paragraphen geht man zum Nachweis von der gemeinsamen Gleichungsform

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$$

der Geraden und Kreise aus und trägt hier

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

ein. So findet man wieder Geraden und Kreise. Leicht erkennt man noch insbesondere, daß die z-Geraden in w-Kreise durch $\frac{a}{c}$ übergehen, und daß die z-Kreise durch $-\frac{d}{c}$ die w-Geraden liefern. Man muß sich nur erinnern, daß wir die Geraden als Kreise durch den unendlichfernen Punkt auffassen wollten.

4. Zwei Kreisbüschel (Fig. 21) spielen bei jeder linearen Funktion eine besondere Rolle. Wir betrachten zunächst den Fall zweier verschiedener Fixpunkte. Man sieht leicht ein, daß das Büschel der Kreise durch die beiden Fixpunkte in sich übergeführt wird. Ob dabei die Kreise einzeln festbleiben oder sich im Büschel vertauschen, steht dahin. Beide Fälle können eintreten. So führt ja die Streckung $w = Rz$ die Kreise (das sind hier die Geraden) durch Null und Unendlich einzeln in sich über, während die Drehung um den Nullpunkt dieselben vertauscht. Die zu diesem Büschel senkrechten Kreise bilden bekanntlich gleichfalls ein Büschel, das wegen der Winkeltreue der Abbildung nun gleichfalls in sich übergeht. Wieder können die entsprechenden beiden Fälle eintreten. Man denke nur an Drehung und Streckung mit den Fixpunkten 0 und ∞. Wir nehmen nun an, es liege eine lineare Abbildung $w = w(z)$ mit den Fixpunkten A und B vor. Ich nehme eine zweckdienliche Abbildung der beiden Ebenen w und z vor. Ich setze nämlich $w_1 = \frac{w - A}{w - B}$

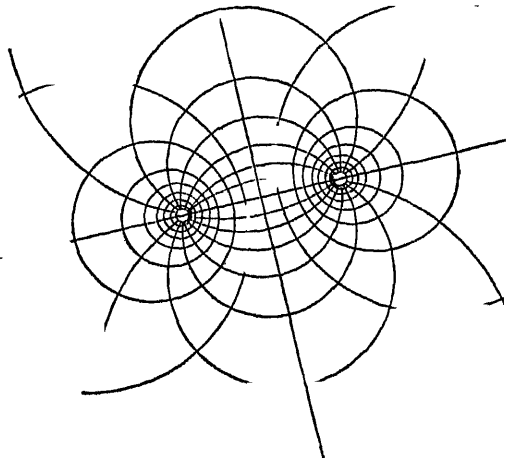



Fig. 21.

und $z_1 = \frac{z-A}{z-B}$. So gehe ich zu einer neuen Ebene über, in welcher ich w_1 und z_1 deute. Die beiden Punktreihen w_1 und z_1 gehen wieder durch eine lineare Abbildung auseinander hervor. Ihre Fixpunkte sind Null und Unendlich. Ich erhalte nämlich diese Abbildung, indem ich erst durch $z_1 = \frac{z-A}{z-B}$ zur z-Ebene übergehe, in dieser dann die Abbildung $w = w(z)$ ausführe und endlich durch $w_1 = \frac{w-A}{w-B}$ zur w_1-Ebene zurückgehe. Beim ersten Schritt gehen Null und Unendlich in A und B über, beim zweiten Schritt bleiben diese Punkte fest, während sie der dritte wieder in 0 und ∞ zurückführt. Da also die Abbildung der z_1-Ebene auf die w_1-Ebene ∞ festläßt, so wird sie durch eine ganze lineare Funktion vermittelt. Da sie dazu noch für $z_1 = 0$ verschwindet, so ist sie von der Form $w_1 = \varrho z_1$. Tragen wir hier wieder die Ausdrücke von w und z ein, so sehen wir, daß man jede lineare Abbildung auf die Form

$$\frac{w-A}{w-B} = \varrho \frac{z-A}{z-B}$$

bringen kann. Hier gilt es nun noch, ϱ durch die ursprünglichen Koeffizienten a, b, c, d auszudrücken. Wir wissen, daß der Wert $z = 0$ den Wert $w = \frac{b}{d}$ liefert. Tragen wir dies in die gefundene Normalform ein, so haben wir

$$\varrho = \frac{B}{A} \cdot \frac{b - Ad}{b - Bd},$$

also nach leichter Umrechnung

$$\varrho = \frac{a + d - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{a + d + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}.$$

Dieses ϱ kann nun reell sein, es kann den Betrag Eins haben oder endlich beliebig komplex sein. Im ersten Falle liegt eine Verallgemeinerung der Streckung mit oder ohne Umklappung vor, welche wir *hyperbolische* Abbildung nennen wollen. Die Verallgemeinerung der Drehung im zweiten Fall heißt *elliptische* Abbildung. Der letzte ist der *loxodromische* Fall. Während es in den beiden ersten Fällen immer ein Büschel von Kreisen gibt, die bei der Abbildung einzeln festbleiben, gibt es bei der loxodromischen Abbildung nicht einen einzigen solchen Kreis. Denn die loxodromische Abbildung ist eine Drehstreckung, wenn wir z. B. den Fall der Fixpunkte Null und Unendlich betrachten. Kurven also, die in sich übergehen sollen, müssen bei einer solchen Drehstreckung in sich verschoben werden. Dies ist aber bei keinem der Kreise der Fall, wohl aber bei gewissen logarithmischen Spiralen, die auch Loxodromen heißen. Es sei eine Aufgabe für den Leser, dies näher durchzuführen.

Eine ähnliche Untersuchung kann man nun auch bei den *parabolischen* Funktionen vornehmen. Man kann auch hier den einzigen Fixpunkt A durch die Abbildung

$$w_1 = \frac{1}{w - A}, \quad z_1 = \frac{1}{z - A}$$

nach Unendlich bringen. Dann wird aus der Abbildung eine Parallelverschiebung. Sie führt diejenigen Geraden einzeln in sich über, welche zur Bewegungsrichtung parallel sind, und vertauscht diejenigen Geraden miteinander, welche zur Bewegungsrichtung senkrecht sind (oder sonst einen bestimmten Winkel gegen dieselbe bilden). Aus diesen beiden Geradenbüscheln werden nun zwei Kreisbüschel durch den einzigen Fixpunkt A. Die Kreise des einzelnen Büschels berühren sich im Fixpunkt. Als Normalform der parabolischen Abbildung ergibt sich dabei

$$\frac{1}{w - A} = \frac{1}{z - A} + C.$$

Die Ausrechnung von C durch die ursprünglichen Koeffizienten a, b, c, d liefert

$$C = \frac{2c}{a + d}.$$

Die Tangentenrichtung des Büschels der einzeln festen Kreise findet man am besten dadurch, daß man auf die Gerade durch 0 und C die Abbildung

$$w = A + \frac{1}{w_1}$$

ausübt. Man erhält ja dabei unmittelbar die jenem Büschel angehörige Gerade, die dann von allen anderen Büschelkreisen in A berührt wird. Die nähere Durchführung ist eine nützliche Aufgabe für den Leser.

5. Die linearen Funktionen bilden eine Gruppe. D. h. wenn $w = l_1(z)$, $w_1 = l_2(w)$ zwei lineare Funktionen sind, so ist nach einer leichten Rechnung auch $l_2\,\{l_1(z)\}$ eine lineare Funktion. Wie es in der Gruppentheorie üblich ist, schreiben wir $l_2 \cdot l_1$ kurz als Zeichen für diese Funktion, die also von $l_1 \cdot l_2 \equiv l_1\,\{l_2(z)\}$ wohl zu unterscheiden ist. Die oben schon eingeführte lineare Umkehrung von $w = l(z)$ wird mit l^{-1} bezeichnet.

6. Invarianz des Doppelverhältnisses. *Die lineare Funktion* $w = \frac{az + b}{cz + d}$ *ist völlig bestimmt, wenn man die Werte kennt, welche sie für drei verschiedene z-Werte annimmt. Auch können für drei beliebige Werte z die zugehörigen Werte w beliebig vorgegeben werden.*

Zunächst leuchtet nämlich ein, daß die lineare Funktion

$$w = \frac{z - \alpha}{z - \gamma} \cdot \frac{\beta - \gamma}{\beta - \alpha}$$

fur $z = \alpha, \beta, \gamma$ die Werte $w_1 = 0, 1, \infty$ annimmt. Ebenso nimmt

$$w_1 = \frac{w - A}{w - C} \cdot \frac{B - C}{B - A}$$

fur $w = A, B, C$ die Werte $w_1 = 0, 1, \infty$ an. Lost man daher die Gleichung

$$\frac{w - A}{w - C} \cdot \frac{B - C}{B - A} = \frac{z - \alpha}{z - \gamma} \cdot \frac{\beta - \gamma}{\beta - \alpha}$$

nach w auf, so erhalt man eine lineare Funktion, welche fur $z = \alpha, \beta, \gamma$ die Werte $w = A, B, C$ annimmt. Die so gefundene Funktion ist die einzige ihrer Art. Denn gäbe es zwei verschiedene

$$w = l(z)$$

und

$$w = l_1(z),$$

so mußte fur $z = \alpha, \beta, \gamma$, also fur *drei* verschiedene Werte, die Gleichung $z = l_1^{-1}\{l(z)\}$ erfullt sein. Nun ist aber $l_1^{-1}\{l(z)\} \equiv \frac{az + b}{cz + d}$ selbst linear. Daher mußte die Gleichung

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

fur die drei verschiedenen Werte $z = \alpha, \beta, \gamma$ erfüllt sein. Daher ist $a = d$, $b = c = 0$. Daher ist $l_1^{-1}(l(z)) \equiv z$. Daher $l(z) \equiv l_1(z)$.

Die oben angegebene Gleichung

$$\frac{w - A}{w - C} \cdot \frac{B - C}{B - A} = \frac{z - \alpha}{z - \gamma} \cdot \frac{\beta - \gamma}{\beta - \alpha}$$

lehrt gleichzeitig, daß die vier Punkte z, α, β, γ das gleiche Doppelverhaltnis haben wie die vier Bildpunkte w, A, B, C. Also:

Das Doppelverhaltnis ist eine Invariante der linearen Abbildung.

7. Spiegelung. Der Kreis durch α, β, γ geht bei der Abbildung in den Kreis durch A, B, C uber. Wegen des umkehrbar eindeutigen und stetigen Verhaltens der Abbildung muß dabei gleichzeitig das Innere des Kreises durch α, β, γ entweder in das Innere oder in das Äußere des Kreises durch A, B, C ubergehen. Das Innere oder das Äußere kommt heraus, je nachdem ob der Kreis durch α, β, γ den Pol der Abbildungsfunktion

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

ausschließt oder umschließt. Bei der Abbildung muß weiter der in der Richtung von α uber β nach γ durchlaufene Kreis in den in der Richtung von A über B nach C durchlaufenen Kreis ubergehen. Das folgt wieder aus der Eindeutigkeit

und Stetigkeit der Abbildung. Liegt dann aber das Innere des Kreises durch α, β, γ links von der Durchlaufungsrichtung, so muß auch das Bild des Inneren links von dem Bild der Durchlaufungsrichtung, also von der Richtung A, B, C liegen. Das folgt aus der Winkeltreue der Abbildung. Dabei muß nämlich der Winkel φ der Fig. 22a entweder in den der Fig. 22b oder den der Fig. 22c übergehen. Der Fall der Fig. 22b entspricht der Abbildung auf das Innere. Im Falle der Fig. 22c erfolgt die Abbildung auf das Äußere.

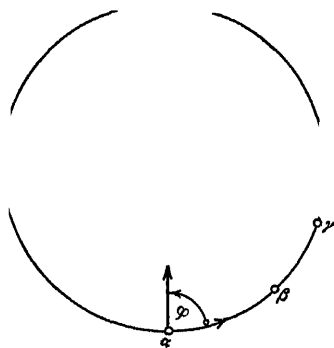
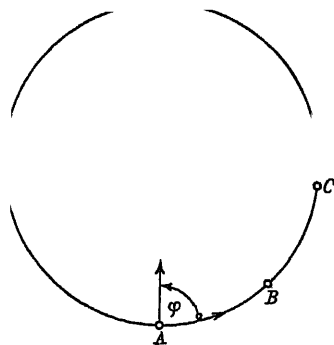



Fig 22a

Fig 22b

Zu den Kreisen gehören als Spezialfall die Geraden. Daher ist es möglich, das Innere eines Kreises auf eine jede der beiden von einer Geraden bestimmten Halbebenen abzubilden. Z. B. soll der Kreis $|w| < 1$ auf die *obere Halbebene*, d. h. auf $\mathfrak{I}(z) > 0$ abgebildet werden können. Man hat dazu nur etwa die lineare Funktion so zu wählen, daß sie für $z = 0, 1, \infty$ die Werte $w = -i, 1, i$ annimmt. Daher leistet die Funktion

$$z = \frac{w+i}{w-i} \, \frac{1-i}{1+i} = \frac{w+i}{iw+1},$$

also

$$w = \frac{-z+i}{iz-1} = i\,\frac{z-i}{z+i},$$

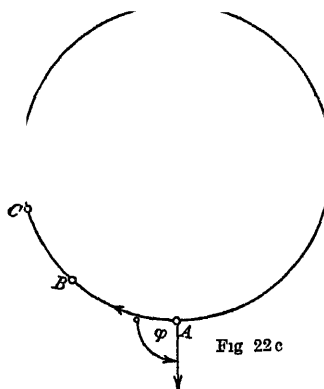



Fig 22c

die gewünschte Abbildung. In der Tat wird ja auch $z = i$ für $w = 0$, während die Funktion für reelle z den Betrag Eins erhält.

Für die weitere Behandlung derartiger Abbildungen ist die folgende Bemerkung von Nutzen. *Bei der Abbildung zweier Kreise aufeinander gehen inverse Punkte in inverse Punkte über. Ist aber der eine Kreis insbesondere eine Gerade, so übernehmen die spiegelbildlichen Punkte die Rolle der inversen.*

Wegen dieser Eigenschaft der inversen Punkte nennt man die Inversion auch *Spiegelung am Kreise*. Dabei versteht man bei einem beliebigen Kreise unter inversen Punkten z und z' zwei Punkte, die durch die Konstruktion der Fig. 4 S. 11 auseinander hervorgehen. Ist also R der Radius des Kreises,

O sein Mittelpunkt, so gilt für die Entfernungen $|Oz|$ und $|Oz'|$ die Relation

$$|Oz| \cdot |Oz'| = R^2.$$

Die Behauptung über die Invarianz der inversen Beziehung bei linearer Abbildung ist leicht zu beweisen. Man muß nur beachten, daß inverse Punkte die Grundpunkte eines Büschels von Kreisen sind, die den Inversionskreis senkrecht durchsetzen, und daß jeder zu K senkrechte Kreis aus lauter Punktepaaren besteht, die zueinander an diesem Kreis K invers sind (vgl. S. 47). Ein Büschel zu K senkrechter Kreise geht aber bei der Abbildung von K auf K' in ein Büschel von Kreisen über, die K' senkrecht durchsetzen. Aus dem inversen Grundpunktepaar des einen Büschels wird aber das Grundpunktepaar des anderen Büschels, also nach dem eben Gesagten ein paar inverser Punkte. Ist aber der eine Kreis insbesondere eine Gerade, so sind die Grundpunkte des Orthogonalbüschels symmetrisch zur Geraden.

8. Abbildung der Halbebene auf den Kreis. Soll bei der Abbildung der Halbebene $\mathfrak{J}(z) > 0$ auf den Kreis $|w| < 1$ der Punkt $z = \alpha$ in $w = 0$ übergehen, so muß der spiegelbildliche Punkt $z = \bar{\alpha}$ in den zu $w = 0$ inversen $w = \infty$ übergehen. Daher muß die betreffende lineare Abbildungsfunktion für $z = \alpha$ verschwinden und für $z = \bar{\alpha}$ einen Pol haben. Hier muß also ihr Nenner verschwinden. Daher hat die Funktion die Gestalt

$$w = \frac{\delta(z-\alpha)}{\varepsilon(z-\bar{\alpha})}. \quad \mathfrak{J}(\alpha) > 0.$$

Hier muß aber $\left|\frac{\delta}{\varepsilon}\right| = 1$ sein. Denn für reelle $z = x$ soll

$$\left|\frac{\delta(x-\alpha)}{\varepsilon(x-\bar{\alpha})}\right| = 1$$

sein. Da aber schon

$$\left|\frac{x-\alpha}{x-\bar{\alpha}}\right| = 1$$

ist, so muß auch $\left|\frac{\delta}{\varepsilon}\right| = 1$ sein. Daher kann man[1])

$$\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{a}{\bar{a}}$$

1) In der Tat kann man ja jede komplexe Zahl vom Betrag Eins als Quotient zweier konjugiert komplexer Zahlen darstellen. Ist nämlich

$$\frac{\delta}{\varepsilon} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta,$$

so genügt es

$$a = r\left(\cos\frac{\vartheta}{2} + i\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$$

zu setzen, wie man leicht nachrechnet.

setzen, und so wird w von der Form

$$w = \frac{az+b}{\bar{a}z+\bar{b}}, \quad \left(\Im\left(\frac{b}{a}\right) < 0\right)$$

und dies ist also die allgemeinste Funktion, welche $\Im(z) > 0$ auf $|w| < 1$ abbildet.

9. Abbildung des Einheitskreises auf sich. Es ist auch leicht, die *allgemeine Gestalt einer linearen Abbildung* anzugeben, *welche den Einheitskreis in sich überführt.* Zähler und Nenner mussen nämlich in inversen Punkten verschwinden. Daher muß die Abbildung von der Form

$$w = \beta \frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}$$

sein. Hier muß aber noch β den Betrag Eins haben. Denn fur $|z| = 1$ muß die Funktion den Betrag Eins erhalten. Nun ist aber

$$|z-\alpha| = |\bar{z}-\bar{\alpha}| = \left|\frac{1}{\bar{z}}\right| |\bar{z}-\bar{\alpha}| = \left|1-\bar{\alpha}\frac{1}{\bar{z}}\right| = |1-\bar{\alpha}z| = |\bar{\alpha}z-1|.$$

Denn wegen $|z| = 1$ ist $z\bar{z} = 1$, also $z = \frac{1}{\bar{z}}$. Daher muß auch $|\beta| = 1$ sein. Wir bringen nun wieder β auf die Form $\frac{a}{\bar{a}}$ und sehen somit, daß die allgemeinste lineare Abbildung des Einheitskreises auf sich in der Form

$$w = \frac{az-b}{\bar{b}z-\bar{a}}$$

geschrieben werden kann. Fuhrt diese aber nun auch das Innere in das Innere uber? Dazu ist offenbar notwendig und hinreichend, daß die Nullstelle des Zahlers dem Inneren des Einheitskreises angehort. Dazu muß aber $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$ oder $\bar{a}a - b\bar{b} > 0$ sein.

Also ist

$$w = \frac{az-b}{\bar{b}z-\bar{a}}$$

mit

$$aa - b\bar{b} > 0$$

die allgemeinste lineare Abbildung des Einheitskreises auf sich.

Der Leser moge hieraus erschließen, daß die Drehungen um $z = 0$ die einzigen linearen Abbildungen sind, die $|z| < 1$ in sich uberfuhren und dabei $z = 0$ festlassen.

10. Abbildung einer Halbebene auf sich. *Die einzigen Abbildungen der oberen Halbebene auf sich sind in der Form*

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

mit reellen Koeffizienten und positiver Determinante $ad - bc$ enthalten.

Daß man die Koeffizienten stets reell annehmen kann, sieht man, wenn man die Stellen α, β, γ der reellen z-Achse heranzieht, welche in die Punkte $w = 0, 1, \infty$ übergehen sollen. Dann kann man nämlich die Abbildung so schreiben:

$$w = \frac{z-\alpha}{z-\gamma} \cdot \frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}.$$

Daß die Determinante positiv sein muß, erkennt man, wenn man beachtet, daß $z = i$ in einen Punkt mit positivem Imaginarteil übergehen muß. Man rechnet nämlich leicht aus, daß

$$\Im\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right) = \frac{ad-bc}{c^2+d^2}$$

wird, daß also

$$ad - bc > 0$$

sein muß, wenn der Imaginarteil positiv sein soll.

11. Kugeldrehungen. Die *Kugeldrehungen* sind winkeltreue Abbildungen der Kugel auf sich. Durch die winkeltreue stereographische Projektion werden aus ihnen winkeltreue Abbildungen der Ebene. Dieselben haben diametrale Fixpunkte und führen das Kreisbüschel durch dieselben in sich über, so wie die Kugeldrehungen die Großkreise durch die Endpunkte der Drehachsen ineinander überführen. Sie führen weiter das zu diesem senkrechte Büschel Kreis für Kreis in sich über. Daher liegt die Vermutung nahe, daß den Kugeldrehungen in der Ebene Abbildungen durch elliptische lineare Funktionen entsprechen. Diese haben ja tatsächlich die gewünschte Eigenschaft bei ihrer Übertragung auf die Kugel. Sie führen jeden Großkreis in einen anderen über, der mit ihm einen bestimmten Winkel einschließt, und führen die dazu senkrechten „Breitenkreise" einzeln in sich über. Das sind also tatsächlich Kugeldrehungen. Um ihren analytischen Ausdruck zu finden, beachten wir, daß ja auch Nord- und Südpol der Kugel bei der Drehung aus diametralen Punkten hervorgehen müssen. Daher müssen Zähler und Nenner der linearen Funktion in diametralen Punkten verschwinden. Sie hat also nach S. 51/52 die Form

$$w = \beta\,\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z+1}.$$

Nun muß aber weiter aus jedem diametralen Punktepaar $\left(z, -\frac{1}{\bar{z}}\right)$ durch Kugeldrehung wieder ein diametrales Punktepaar werden. Daher muß

$$\beta\,\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z+1} = -\frac{1}{\bar{\beta}}\,\frac{-\alpha+z}{-1-\bar{\alpha}z}$$

sein. Nun ist aber

$$\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z+1} = -\frac{-\alpha+z}{-1-\bar{\alpha}z}.$$

Daher muß auch $\beta\bar{\beta} = 1$ sein. Ich schreibe wieder $\beta = \frac{a}{\bar{a}}$. So sieht man:

Alle Kugeldrehungen sind von der Form

$$w = \frac{az - b}{\bar{b}z + \bar{a}}.$$

12. Bemerkungen. a) Man kann stets die Abbildung des Einheitskreises auf sich so bestimmen, daß ein gegebener Punkt P des Inneren in einen anderen gegebenen Punkt P' des Inneren übergeht, und daß ein gegebener Peripheriepunkt φ in einen anderen gegebenen Peripheriepunkt φ' übergeführt wird. Denn man kann etwa zunächst durch eine Drehung P auf den Durchmesser von P' bringen. Dann wählt man eine hyperbolische Abbildung, deren Fixpunkte in den Enden dieses Durchmessers liegen derart, daß der eine Innenpunkt in den anderen P' übergeht. Jede solche hyperbolische Abbildung führt ja den Durchmesser und den Einheitskreis in sich über. Das Streckungsverhältnis kann aber stets so gewählt werden, daß unser Wunsch erfüllt wird. Bei diesen beiden Abbildungen ist nun aber der gegebene Peripheriepunkt φ in irgendeine Lage φ'' gelangt. Man führt daher nun endlich noch eine elliptische Abbildung aus, deren Fixpunkt der nun glücklich erreichte Innenpunkt P' ist und der φ'' nach φ' schafft. Damit ist man am Ziele. Die nähere Durchführung dieser Andeutungen sei dem Leser überlassen.

b) Unsere Betrachtungen lehren auch, daß die Abbildungen durch lineare Funktionen *gebietstreu* sind. Sei nämlich irgendein Gebiet gegeben, welches zunächst den Pol der Funktion nicht enthalten möge, so wird aus jeder um einen Gebietspunkt gelegten Kreisfläche eine Kreisfläche um den Bildpunkt und aus jeder stetigen Kurve, welche zwei Gebietspunkte verbindet, eine stetige Verbindungslinie der Bildpunkte. Enthält aber das gegebene Gebiet den Pol, so wird aus einer Kreisfläche um den Pol das Äußere einer gewissen Kreisfläche der Bildebene, also eine Umgebung des Punktes ∞ der Bildebene. Wir können daher auch in diesem Falle die Abbildung gebietstreu nennen, wenn wir verabreden, eine den Punkt ∞ enthaltende Punktmenge ein Gebiet zu nennen, wenn für alle endlichen Punkte die übliche Gebietsdefinition erfüllt ist (S. 21), und wenn sie außerdem das Äußere eines gewissen Kreises voll enthält.

Man sieht daher, daß man unsere Gebietsdefinition auf S. 21 wörtlich aufrechterhalten kann. Man muß nur für den unendlichfernen Punkt die Begriffe stetige Kurve und Umgebung, die in der Gebietsdefinition vorkommen, in der S. 49 angegebenen Weise erklären, so wie dies der Definition des unendlichfernen Punktes entspricht.

Jetzt wird es auch möglich, von einem unendlichfernen Randpunkt zu reden, so daß nun jeder — nicht nur jeder endliche — Bereich Randpunkte besitzt —

es sei denn, daß er aus der Vollebene besteht —, und daß stets diese Randpunkte eine abgeschlossene Menge bilden. Man denke nur immer an die entsprechenden Verhältnisse auf der Kugeloberfläche.

§ 4. Potenzen und Wurzeln.

1. Verhalten der Abbildung bei $z = 0$. Nach den linearen Funktionen bieten sich als einfachste analytische Funktionen die Potenzen dar. Wir werden die Potenzen mit ganzzahligem positiven Exponenten m und mit gebrochenem Exponenten $\frac{1}{n}$, wo n ganzzahlig ist, betrachten. Die Umkehrungsfunktion von $w = z^m$ ist nämlich $z = \sqrt[m]{w}$. Wir beginnen mit der eindeutigen der zwei Funktionen, also mit $w = z^m$, und betrachten sie zunächst für endliche z. Überall ist die Funktion differenzierbar, also analytisch. Überall ist die Ableitung von Null verschieden, außer bei $z = 0$. Überall sonst ist also die durch $w = z^m$ vermittelte Abbildung winkeltreu. Nur die Stelle $z = 0$ macht eine Ausnahme. Den näheren Verlauf der Abbildung übersehen wir am besten, wenn wir wieder, wie bei $w = z^{-1}$, Polarkoordinaten einführen. Wir setzen also

$$|w| = \varrho,\ \arg w = \vartheta,\ |z| = r,\ \arg z = \varphi.$$

Dann wird
$$\varrho = r^m,\ \vartheta = m\varphi$$

der Ausdruck der Abbildung in Polarkoordinaten. Zwei Kurven also, die sich in $z = 0$ unter dem Winkel ψ schneiden, werden auf zwei Kurven abgebildet, die sich in $w = 0$ unter dem Winkel $m\psi$ schneiden. Also nicht winkeltreu ist die Abbildung bei $z = 0$, sondern alle Winkel werden da ver-m-facht. Aus der positiven reellen Achse der z-Ebene wird die positive reelle Achse der w-Ebene. Lassen wir einen Speer von der positiven reellen Achse ausgehend im positiven Sinne sich um den Winkel φ drehen, so beschreibt sein Bildspeer in der w-Ebene den m-fachen Winkel. Hat sich also der Speer in der z-Ebene um $\frac{2\pi}{m}$ gedreht, so hat der Bildspeer bereits einen ganzen Umlauf vollendet. Also auch der Speer $\varphi = \frac{2\pi}{m}$ der z-Ebene erscheint auf die positive reelle Achse der w-Ebene abgebildet. Der von den beiden Speeren $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{2\pi}{m}$ begrenzte Winkelraum, welchen der Speer bei seiner Drehung überstreichen hat, erscheint also auf die volle w-Ebene abgebildet. Dreht sich nun der Speer in der z-Ebene noch weiter, so überstreicht der Bildspeer aufs neue die w-Ebene, und zwar so, daß alle Speere, deren Richtungen sich nur um Vielfache von $\frac{2\pi}{m}$ unterscheiden, auf denselben Speer der w-Ebene abgebildet erscheinen. Hat so der

z-Speer einen zweiten Winkelraum der Öffnung $\frac{2\pi}{m}$ bestrichen, so hat der w-Speer gerade seinen zweiten Umlauf vollendet. Lassen wir den z-Speer einmal die volle z-Ebene überstreichen, so wird die w-Ebene genau m-mal von den Bildspeeren überdeckt. Punkte von gleichem absoluten Betrag, deren Argumente sich um Vielfache von $\frac{2\pi}{m}$ unterscheiden, liefern denselben Bildpunkt in der w-Ebene. Darin liegt ausgesprochen, daß die Umkehrungsfunktion $z = \sqrt[m]{w}$ m-deutig ist; für jedes w nimmt sie m Werte von gleichem absoluten Betrag an, deren Argumente sich um Vielfache von $\frac{2\pi}{m}$ unterscheiden. Die entsprechenden Punkte der z-Ebene bilden die m Ecken eines regulären m-Ecks. Diese m Bestimmungsweisen stehen nun aber nicht unvermittelt nebeneinander wie etwa die beiden Werte der Quadratwurzel *im Reellen*. Laßt man vielmehr den Punkt w m-mal nacheinander einen Kreis um $w = 0$ beschreiben, laßt man also $\arg w$ stetig um $2\pi m$ wachsen, so kommen ganz von selbst die m Bestimmungsweisen der m-ten Wurzel zum Vorschein. Diese Bestimmungsweisen erscheinen so als m *Zweige* derselben Funktion.

2. Die Riemannsche Fläche. Es ist nun mißlich, daß die m Bilder der m Zweiecke der z-Ebene in derselben w-Ebene gedeutet werden, so daß man zwar begrifflich die m Bilder unterscheiden kann, während sie anschaulich keine Unterscheidung aufweisen. Dem hilft man nach *Riemann* dadurch ab, daß man sich den m Bildern entsprechend die w-Ebene in m Exemplaren vorstellt. In jedem bringt man das Bild eines der m Zweiecke zur Darstellung. Man kann sich nun diese Ebenen den m Zweiecken entsprechend fortlaufend numerieren. Man kann sie sich auch der Reihe nach übereinander legen und so miteinander verbinden, wie die m Zweiecke miteinander verbunden sind. Das kann man sich dann etwa nach Art einer Schraubenfläche vorstellen. Nur ist dann die zuletzt erhaltene positiv reelle Achse des m-ten Blattes an die zuerst erhaltene positiv reelle Achse des ersten Blattes anzuheften. Das mag für die materielle Ausführung in Karton schwierig sein. Leichter geht das schon, wenn man das Modell nach dem Vorschlag des Herrn Hellinger häkeln läßt. Aber ganz abgesehen von dem allem treten in der Flächentheorie und in der darstellenden Geometrie so oft Selbstdurchdringungen auf, daß ein solches Vorkommen kaum der Vorstellung ernstliche Schwierigkeiten machen dürfte. Zudem wird es die Anschaulichkeit der Vorstellung erhöhen, wenn sich der Leser vergegenwärtigt, wie der vorhin herangezogene Speer bei seiner m-maligen Umlaufung des Punktes $w = 0$ gerade eine Fläche bestreicht, welche m-mal die ganze w-Ebene bedeckt.

Wir sind damit zum ersten Male auf einen mehrblättrigen Bereich gestoßen. Diese spielen in der Funktionentheorie eine große Rolle. Gleichzeitig haben

wir damit wieder eine Erweiterung der auf S. 21 gegebenen Bereichdefinition vor uns.[1]) Dort waren ja nur einblattrige Bereiche vorgesehen. Zum Unterschied von den jetzt eingefuhrten mehrblattrigen Bereichen wollen wir jene einblättrigen fortan *schlicht* nennen. Ein mehrblattriger Bereich muß ganz und gar nicht wie im bisher behandelten Beispiel einen Windungspunkt aufweisen. Es ist möglich, daß die Umgebung eines jeden Bereichpunktes schlicht ist, während man doch um den Punkt $w = 0$ unserer Riemannschen Fläche keine schlichte Umgebung abgrenzen kann. Ein derartiges Beispiel einer zweiblättrigen Flache ohne Windungspunkt zeigt Fig. 24, während Fig. 23 die Umgebung von $w = 0$ im Beispiel der Funktion $\sqrt{w}$ aufweist. In Fig. 24 greift also bei B eine „Zunge" des Bereiches uber ein anderes Stück desselben Bereiches hinuber. Die (unendliche) Flache der Fig. 23 heißt *Riemannsche Fläche* der Funktion $t = \sqrt{w}$. Allgemein heißt die in diesem Paragraphen eingefuhrte Flache *Riemannsche Flache* der Funktion $\sqrt[m]{w}$. Auf dieser Fläche ist die Funktion $\sqrt[m]{w}$ eine eindeutige Funktion des Ortes. Denn die m Werte, die $\sqrt[m]{w}$ beim gleichen w annimmt, haben wir in den m Blättern zur Deutung gebracht. Aber wir haben sie nicht willkurlich auf die m Blatter verteilt, sondern nach einem vernunftigen Plan, namlich so, daß sich z mit w stetig andert.

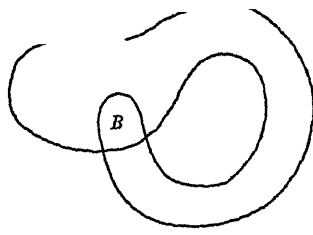



Fig 23

Fig. 24

Betrachten wir die Umgebung irgendeines von $w = 0$ verschiedenen Punktes der Riemannschen Fläche, also irgendeinen Kreis, der $w = 0$ nicht enthalt. In ihm ist $\sqrt[m]{w}$ eine eindeutige Funktion. In jedem in den anderen Blättern der Riemannschen Fläche uber diesem liegenden Kreis ist gleichfalls die $\sqrt[m]{w}$ eindeutig erklart. Aber die Werte in den m ubereinander liegenden Kreisen sind voneinander verschieden. Bei $\sqrt{w}$ unterscheiden sie sich durchs Vorzeichen, bei $\sqrt[m]{w}$ gehen sie durch Multiplikation mit den m-ten Einheitswurzeln auseinander hervor, das ist mit den m Wurzeln der Gleichung $t^m - 1 = 0$. Diese sind

$$\cos\frac{h 2\pi}{m} + i \sin\frac{h 2\pi}{m} \; (h = 0, 1, \ldots m-1).$$

Bei der Deutung in einer Zahlenebene liefern sie die m Ecken eines dem Einheitskreis einbeschriebenen regulären m-Ecks.

Ganz anders verhält sich $\sqrt[m]{w}$ in der Umgebung von $w = 0$. Diese Umgebung

1) Wir werden sie nachher noch bestimmter begrifflich fassen.

ist, wie sie auch gewählt werden mag, m-blattrig. Bewegt man sich auf der Fläche fort, indem man immer über demselben $w = 0$ umschließenden Kreise bleibt, so erhält man bei einmaligem, bei zweimaligem Umlauf keine auf der Fläche geschlossene Kurve. Erst nach m-maligem Umlauf kommt man zum Ausgangspunkt zurück. Bei einmaligem Umlauf gelangt man also von dem einen Wert, den die m-te Wurzel annehmen kann, zu einem folgenden und so fort. Bei $\sqrt{w}$ erhält man nach einmaligem Umlauf gerade den durchs Vorzeichen unterschiedenen anderen Wert der Quadratwurzel, so daß also im Komplexen durch diesen Umlauf vereinigt scheint und in Zusammenhang gebracht, was im Reellen unvermittelt und getrennt nebeneinander stand.

3. Gebietstreue. Jeder Zweig der Funktion $\sqrt[m]{w}$ ist überall außer bei $w = 0$ differenzierbar. Denn legen wir um die betreffende Stelle der Riemannschen Fläche einen $w = 0$ nicht enthaltenden Kreis, so sondern wir damit einen eindeutigen stetigen Zweig der Funktion aus. Ich betrachte nun das Kreisbogenviereck, welches diesen Kreis umschließt. Es ist begrenzt von zwei Kreisbogen $\varrho_1 = r_1^m$ und $\varrho_2 = r_2^m$ und von zwei Speerstücken $\vartheta_1 = m\varphi_1$ und $\vartheta_2 = m\varphi_2$. Dieses Viereck geht durch Abbildung hervor aus dem Viereck der z-Ebene, welches von $r = r_1$, $r = r_2$, $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ begrenzt ist. Darin liegt beiläufig wieder, daß die vermittelten Abbildungen gebietstreu sind. Sei nun $w = a^m$ die Stelle, an der wir $z = \sqrt[m]{w}$ differenzieren wollen, und $a \neq 0$ der Wert, den wir da der m-ten Wurzel beilegen wollen, dann sei a die entsprechende Stelle der z-Ebene. $w = z^m$ aber vermittelt, wie wir wissen, eine schlichte gebietstreue Abbildung einer genugend kleinen Umgebung dieser Stelle. Somit sind die S. 35 bei der Differentiation der Umkehrungsfunktion gemachten Voraussetzungen alle erfüllt. Die Umkehrungsfunktion

$$z = \sqrt[m]{w}$$

ist differenzierbar, und man findet

$$\left.\frac{dz}{dw}\right|_{w=a^m} = \frac{1}{\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=a}} = \frac{1}{m}\, a^{1-m}$$

und allgemein

$$\frac{d\sqrt[m]{w}}{dw} = \frac{1}{m}\, w^{\frac{1}{m}-1}.$$

Demnach ist $\sqrt[m]{w}$ differenzierbar. Also ist tatsächlich jeder Zweig der Funktion $\sqrt[m]{w}$ in der Umgebung einer jeden von $w = 0$ verschiedenen Stelle der w-Ebene analytisch.

4. Verzweigungspunkt. Bei $w = 0$ würde man analog sehen, daß der Grenzwert von $\frac{\Delta z}{\Delta w}$ unendlich wird. Hier ist also die Funktion nicht differen-

zierbar. Man nennt $w = 0$ eine *singuläre* Stelle der Funktion $\sqrt[m]{w}$, zum Unterschied von den übrigen Stellen, die man *reguläre* nennt. Auch die Pole, die uns bei den linearen Funktionen begegneten, sind solche singulären Stellen. Die hier auftretende hat noch die Besonderheit, daß in der Umgebung derselben die Funktion nicht eindeutig erklärt ist. Man nennt eine solche Stelle einen Verzweigungspunkt m-ter Ordnung, weil dort m Zweige der Funktion in dem Sinne miteinander zusammenhängen, daß man durch Umlaufen der Stelle $w = 0$ von jedem Zweige zu jedem anderen gelangen kann.

5. Bereichbegriff. Wir erwähnten vorhin schon kurz, daß die durch $w = z^m$ vermittelte Abbildung an allen von $z = 0$ verschiedenen Stellen gebietstreu ist, insofern, als sie jedes um eine solche Stelle gelegte nicht zu große Kreisbogenviereck auf ein schlichtes Kreisbogenviereck abbildet. Umfaßt aber das Kreisbogenviereck Argumente, die um mehr als $\frac{2\pi}{m}$ schwanken, so kommt ein nicht schlichtes Kreisbogenviereck zum Vorschein, also ein Bereich von der Art des in Fig. 24 gezeichneten. *Also auch die Betrachtung solcher Bereiche ist von zwingender Notwendigkeit für die Funktionentheorie.* Zu einer neuen Erweiterung des Bereichbegriffes zwingt uns die Betrachtung der Abbildung in der Umgebung des Punktes $z = 0$. Aus einer schlichten Umgebung des Punktes $z = 0$ wird die m-fach gewundene Umgebung des Punktes $w = 0$. Soll der Satz von der Gebietstreue hier gültig bleiben, so müssen wir nun weiter unter der Umgebung des Punktes $w = 0$ eines Bereiches etwas Allgemeineres verstehen, als S. 21 in Aussicht genommen war. *Wir wollen unter einer Umgebung von* $w = 0$ *eine ein- oder mehrblättrige Punktmenge verstehen, welche durch eine Funktion* $z = \sqrt[m]{w}$ *auf die schlichte gewöhnliche Umgebung von* $z = 0$ *abgebildet werden kann.* Analog werde unter einer Umgebung des Punktes $w = a$ eines Bereiches eine Punktmenge verstanden, welche durch die Funktion $z = \sqrt[m]{w - a}$ bei passend gewähltem ganzzahligen m auf die schlichte Umgebung von $z = 0$ abgebildet werden kann. *Unter einem Bereich versteht man dann nach wie vor eine Punktmenge derart, daß jeder Punkt eine Umgebung aus lauter Bereichpunkten besitzt, und daß man irgend zwei Punkte durch eine stetige Kurve aus Bereichpunkten verbinden kann.* Eine Erweiterung des Begriffes Umgebung war auch schon bei $w = \frac{1}{z}$ vorgenommen worden. Hier tritt nun auch bei $z = \infty$ noch eine Erweiterung auf gewundene Flächenstücke hinzu. Da wir nämlich allgemein unter einer Umgebung des Punktes $w = \infty$ das durch $t = \frac{1}{w}$ vermittelte Bild einer Umgebung von $t = 0$ verstehen wollten, so führt die Verallgemeinerung des Begriffes Umgebung bei endlichen Punkten ganz natürlich auch zu einer Verallgemeinerung bei $w = \infty$. Eine solche gewundene Umgebung weist ja auch der unendlichferne Punkt der Riemannschen Fläche

von $\sqrt[m]{w}$ auf. Um festzustellen, welcher Art die durch $w = z^m$ vermittelte Abbildung der Funktion in der Umgebung von $z = \infty$ ist, hat man im Sinne unserer Definition $z = \frac{1}{t}$ und $w = \frac{1}{\tau}$ einzuführen. Dann wird $\tau = t^m$. Also ist die Umgebung von $w = \infty$ auf der Riemannschen Fläche von $\sqrt[m]{w}$ genau so gewunden wie die Umgebung von $w = 0$.

§ 5. Der Begriff des funktionentheoretischen Bereiches.[1])

1. Fragestellung. Die voraufgegangenen Erörterungen über die durch Potenzen und Wurzeln vermittelten Abbildungen setzen uns nun instand, den Bereichbegriff in der Allgemeinheit aufzustellen, in der er für die Funktionentheorie nötig ist. Es genügt dazu nämlich nicht, Bereiche in dem gewöhnlichen, auf S. 21 angegebenen Sinne heranzuziehen, selbst dann nicht, wenn man noch den Bereichbegriff in der auf S. 49 erörterten Weise durch Hinzunahme eines uneigentlichen unendlichfernen Punktes erweitert. Vielmehr zeigt die Betrachtung der durch Potenzen vermittelten Abbildungen, daß es zu eng ist, Bereiche zu betrachten, bei welchen jeder Punkt durch seine z-Koordinate schon eindeutig festgelegt worden ist. Man muß statt dessen zulassen, daß jeder oder einzelnen z-Koordinaten mehrere Bereichpunkte zugehören, die man dann etwa durch der Koordinate angehängte Nummern ($z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots$) unterscheiden mag. Unter einem Bereich oder einem Gebiet verstehen wir dann wieder eine Punktmenge aus solchen „kotierten" Punkten, welche aber noch gewissen weiteren, jetzt anzugebenden Bedingungen genügen muß, wenn sie wirklich ein Recht auf den Namen Bereich oder Gebiet oder Fläche haben soll. Es sind Bedingungen, die durchaus den auf S. 21 bei schlichten Bereichen angegebenen entsprechen: die Umgebungsbedingung und die Zusammenhangsbedingung.

2. Umgebung. Mit Hilfe von Umgebungen der einzelnen Punkte können wir definieren, wann eine Menge von kotierten Punkten Bereich heißen soll. Unter *Umgebungen* werden dabei gewisse Teilmengen des Bereiches verstanden. Es sind zwei Gruppen von Festsetzungen nötig, von denen die erste jetzt anzugebende vom Umgebungsbegriff handelt und letzten Endes deshalb nötig ist, weil nicht zu jedem Punkt nur eine Umgebung, sondern deren beliebig viele gehören werden. Die Festsetzungen beziehen sich daher auf Mengen von Umgebungen. Wir wollen sagen, eine Menge von Umgebungen von Bereichpunkten bilde ein *Umgebungssystem,* wenn für die dem System angehörigen Umgebungen folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) Bei der ersten Lektüre mag der Leser diesen Paragraphen überschlagen. Er kann später nach Bedarf darauf zurückkommen.

a) *Zu jedem Bereichpunkt gehort mindestens eine in dem System enthaltene Umgebung.* b) *In dem Durchschnitt zweier Umgebungen desselben Punktes A ist eine Umgebung von A enthalten.* (Durchschnitt d. s. die gemeinsamen Punkte zweier Umgebungen). c) *Jede Umgebung eines Bereichpunktes enthält zu jedem ihr angehörigen Bereichpunkt auch eine Umgebung desselben.* d) *Verschiedene Punkte des Bereiches besitzen u. a. punktfremde Umgebungen.* D. h. sind B und C die beiden verschiedenen Punkte, so kommen unter den dem System angehorigen Umgebungen, die B oder C enthalten, auch Umgebungen vor, die keinen Punkt gemein haben.

Es ist klar, daß im Falle eines schlichten Bereiches der z-Ebene die Kreise von genugend kleinem Radius um Bereichpunkte als Mittelpunkt ein Umgebungssystem bilden. Es genugt sogar, die Kreise mit rationalem Radius um Mittelpunkte mit rationalen (x, y)-Koordinaten zu nehmen.

Für die im vorigen Paragraphen eingefuhrte Riemannsche Flache von $\sqrt[m]{z-a}$ haben alle Punkte mit Ausnahme von 0 und ∞ als Umgebungen schlichte Kreisscheiben, während man bei 0 und ∞ selbst m-fach gewundene Kreisscheiben, d. i. die Gesamtheit der Punkte der Riemannschen Flache mit genugend kleinen bzw. mit genugend großen z-Koordinaten nehmen muß. Diese ein- oder mehrblättrigen Kreisscheiben bilden ein Umgebungssystem.

Durch unsere Festsetzungen werden gewisse aus kotierten Punkten bestehende Mengen ausgeschlossen[1]) und es wird weiter in den zulässigen Punktmengen eine gewisse Ordnung gestiftet, d. h. es wird festgesetzt, wie die kotierten Punkte zu Umgebungen zusammengefaßt werden sollen. An sich konnen ja Punkte, deren z-Koordinaten nahe beieinander liegen, ohne gegenseitige Rucksichtnahme mit Koten, d. i. mit Nummern versehen werden. Nachdem das geschehen ist, bleibt festzusetzen, welche der kotierten Punkte nun benachbart heißen sollen. Das geschieht durch unsere den Umgebungsbegriff festlegenden Axiome.

3. Funktionentheoretischer Bereich. Nachdem die Umgebungsaxiome fixiert sind, ermangelt unser Bereich noch des Zusammenhangs. Diesen kann man auf mannigfache Weise definieren.[2]) Hier werde ein Weg beschritten,

1) Ohne die Festsetzung b) z. B. ware die aus $|z| < 1$ als einem und aus $0 < |z| < 1$ als anderem Blatt bestehende Menge ein Bereich. Der Punkt $z = 0$ hatte u. a. zwei wesentlich verschiedene Umgebungen, bestehend aus dem Einheitskreis des einen oder des anderen Blattes. Aber diese beiden Umgebungen hatte keine Umgebung von $z = 0$, sondern nur diesen einen Punkt gemein. Diese Festsetzung b) schaltet also eine funktionentheoretisch völlig gleichgultige Menge vom Bereichbegriff aus.

2) Es ware auch moglich gewesen, erst den Begriff „Haufungspunkt" einer Menge von Punkten zu definieren, als einen Punkt, derart, daß in jeder Umgebung desselben Punkte der Menge liegen

Wir betrachten dann eine Teilmenge N einer Menge M und nennen N in bezug auf M abgeschlossen, wenn jeder Punkt von M, der Haufungspunkt von Punkten aus N ist,

den die funktionentheoretischen Belange nahelegen. Jedem Bereichpunkt A sei eine von A abhangige, in z analytische Funktion $f(z)$ zugeordnet. Jede solche Funktion werde lokale Uniformisierende oder auch Ortsparameter genannt, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt: a) Sie sei in einer zu unserem Umgebungssystem U gehorigen Umgebung u von A eindeutig erklärt. b) Es vermittle $t = f(z)$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung dieser Umgebung u auf einen schlichten Bereich der t-Ebene. c) Es vermittle $f(z)$ die Abbildung jeder dem Umgebungssystem U angehorigen, einen Teil von u bildenden Umgebung eines jeden Punktes von u auf einen schlichten Bereich der t-Ebene.

Ahnlich wie auf S. 49 bei Betrachtung des unendlichfernen Punktes benutzen wir nun den Ortsparameter, um festzulegen, was wir unter einer *in der Umgebung des betreffenden Bereichpunktes stetigen oder analytischen Funktion* verstehen wollen. Wenn eine Funktion auf dem Bereiche in einer gewissen Umgebung eines seiner Punkte eindeutig erklärt ist, so fuhre man den Ortsparameter statt z in die Funktion ein. Dann erhalt man eine in der Umgebung von $t = 0$ eindeutig erklarte Funktion. Das Verhalten dieser Funktion ist maßgebend fur das Verhalten der gegebenen Funktion im Bereiche. Wenn die Funktion als Funktion des Parameters stetig oder analytisch ist, so nennen wir auch die Funktion in dem betreffenden Teil des Bereiches stetig oder analytisch. So wird nun auch deutlich, was wir unter einer stetigen Kurve im Bereiche verstehen wollen. Es ist zunachst eine Punktmenge aus Flachenpunkten. Um eine Punktmenge der Flache in der Umgebung eines ihrer Punkte zu untersuchen, bilden wir durch den Ortsparameter eine Umgebung desselben auf die Umgebung von $t = 0$ ab. Geht dann die Menge in eine stetige Kurve der Parameterebene uber, so sagen wir, die Menge mache eine in der Umgebung des betreffenden Bereichpunktes stetige Kurve aus.

Nun konnen wir auch noch die letzte unserem funktionentheoretischen Bereiche aufzuerlegende Bedingung angeben: *Je zwei seiner Punkte sollen sich durch eine stetige, aus Bereichpunkten bestehende Kurve verbinden lassen.* Funktionentheoretische Bereiche uber der z-Ebene fuhren auch den Namen Riemannsche Flachenstucke. Doch werden wir spater (S. 221) den Begriff der Riemannschen Fläche noch allgemeiner fassen.

4. Folgerungen. Es sei A ein beliebiger Punkt eines funktionentheoretischen Bereiches und B ein Punkt aus der Umgebung u desselben, die durch

zu N gehort. Eine Menge M heißt endlich dann zusammenhängend, wenn sie nicht in zwei punktfremde, nichtleere, in bezug auf M abgeschlossene Mengen zerlegt werden kann. Nennt man dann eine solche mit Umgebungsbegriff und Zusammenhang ausgestattete Menge einen Bereich, so ist dann zwecks Übergang zum funktionentheoretischen Bereich doch wieder der im Text nun folgende Weg einzuschlagen, so daß mit der hier in der Fußnote angegebenen Variante für unsere Ziele nichts gewonnen ist.

das zu A gehörige $t = f(z)$ schlicht abgebildet wird. Zu B gehöre der Ortsparameter $t_1 = f_1(z)$. Nach der Festsetzung c) ist aber auch $t = f(z)$ Ortsparameter von B. Denn $f(z)$ besitzt für jede u angehörige Umgebung von B alle Eigenschaften des Ortsparameters. Also ist in einer Umgebung von B sowohl t eindeutige analytische Funktion von t_1, wie t_1 eindeutige analytische Funktion von t. Beide Funktionen $t(t_1)$ und $t_1(t)$ besitzen daher an den betreffenden Stellen ihrer Ebene von Null verschiedene Ableitungen erster Ordnung.

§ 6. Nähere Betrachtung der durch $w = z^2$ vermittelten Abbildung.

1. Die Parallelen zu den Koordinatenachsen der w-Ebene. Es wird zur Belebung der Vorstellungen beitragen, wenn wir nun noch einige durch $w = z^2$ vermittelte Gebietsabbildungen etwas näher betrachten. Trennen wir Real- und Imaginarteil, so wird

$$u = x^2 - y^2,\ v = 2xy\ (w = u + iv,\ z = x + iy).$$

Dementsprechend gehen die Hyperbeln $x^2 - y^2 = c$ in die Parallelen $u = c$ zur imaginaren w-Achse über. Die dazu senkrechten Hyperbeln $c = 2xy$ gehen,

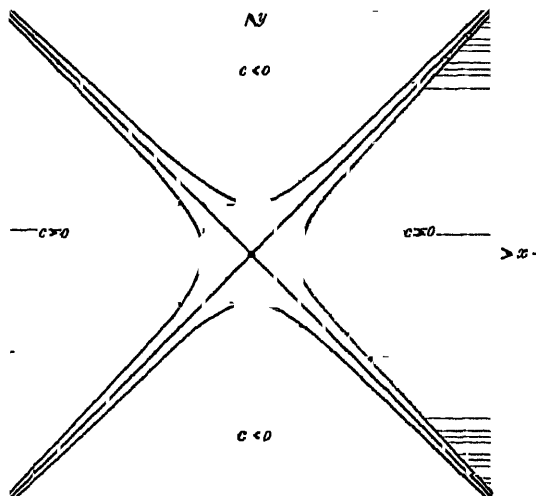
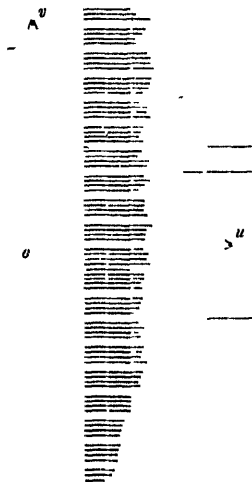



Fig. 25. Fig. 26

der Winkeltreue der Abbildung entsprechend, in die dazu senkrechten Geraden $v = c$, parallel der reellen Achse über. Das Asymptotenpaar $x^2 - y^2 = 0$ liefert insbesondere die imaginäre Achse. Das in Fig. 25 schraffierte, ins Unendliche reichende Gebiet geht also in die von der Geraden $u = c$ begrenzte

rechte Halbebene (Fig. 26) über[1]), in die rechte schon aus dem Grunde, weil die andere das Bild von $z = 0$ enthält. Liegen doch in der Tat auch die Hyperbeln mit größerem positiven Parameter c im Inneren des schraffierten Bereiches. Der andere Ast derselben Hyperbel begrenzt ein Gebiet, dessen Punkte sich von den Punkten des schraffierten Bereiches nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Also wird dies Gebiet auf dieselbe Halbebene der w-Ebene, aber aufs andere Blatt der Riemannschen Fläche abgebildet. Die in Fig. 25 noch dargestellten Hyperbeln mit negativem Parameter liefern entsprechend linke Halbebenen. Der zwischen den beiden Ästen derselben Hyperbel gelegene Bereich geht dagegen nicht in ein schlichtes, sondern in ein zweiblattriges Gebiet über. Dasselbe besteht aus zwei bei $w = 0$ gewundenen Halbebenen, die von zwei übereinanderliegenden Geraden der Riemannschen Fläche begrenzt sind.

2. Die Parallelen zu den Koordinatenachsen der z-Ebene. Was wird aber aus den Linien $x = c$ und $y = c$ der z-Ebene? Für $x = c$ ist

$$u = c^2 - y^2, \quad v = 2cy.$$

Eliminiert man y, so hat man $\quad u = c^2 - \dfrac{v^2}{4c^2}$

oder

$$v^2 = 4c^2(c^2 - u)$$

als Gleichung der Bildkurve. Das sind also Parabeln, deren Scheitel bei $w = c^2$

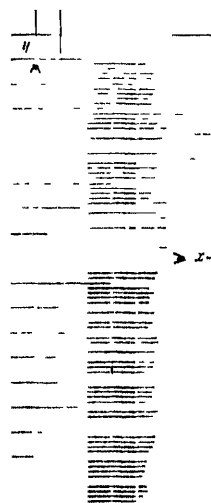
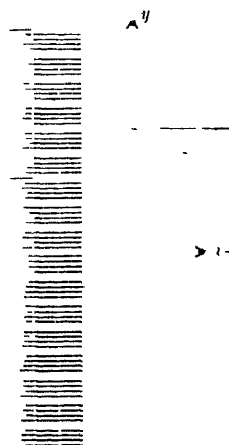



Fig. 27. Fig. 28 Fig. 29.

1) Ich habe in den Figuren $c = 1$ gewählt.

liegt, deren Brennpunkt $w = 0$ ist und die also in Richtung der negativen reellen Achse offen sind. Analog liefern die Geraden $y = c$ die dazu senkrechten konfokalen Parabeln

$$v^2 = 4c^2(u + c^2).$$

Weiter gehen die in den beiden Fig. 27 und 28 schraffierten Gebiete bei der Abbildung auseinander hervor.[1]) Die linke Halbebene liefert keinen schlichten Bereich, wohl aber liefert auch die Halbebene der Fig. 29 den Bereich der Fig. 28 (auf der Riemannschen Fläche im anderen Blatt). Der Streifen zwischen den beiden parallelen Geraden (Fig. 30) geht also in den Rest der Fläche über. Die reelle Achse der z-Ebene liefert die positiv reelle Achse der w-Ebene, die imaginäre z-Achse die negativ reelle Achse der w-Ebene. Diese beiden Geraden zerlegen den Streifen der Fig. 30 in vier Halbstreifen, deren einen wir dort schraffiert haben. Er geht durch die Abbildung in die Halbparabel der Fig. 31 über.

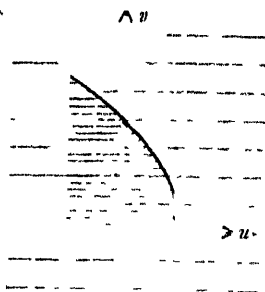



Fig. 30 Fig. 31.

§ 7. Exponentialfunktion und Logarithmus.

1. Definition der Exponentialfunktion. Die Potenzreihe

$$\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

konvergiert nach S. 19 in der ganzen Ebene und stellt nach S. 37 eine durchweg analytische eindeutige Funktion von z dar. Für reelle z ist diese Funktion als Exponentialfunktion bekannt. Auch im Komplexen wollen wir sie Exponentialfunktion nennen und durch e^z bezeichnen. *Da also im Komplexen die Exponentialfunktion durch eine Reihe definiert wird,* so bedarf es der näheren Untersuchung, ob und in welchem Sinne die Schreibweise e^z zum Ausdruck bringt, daß man es mit einer z-ten Potenz von e zu tun hat. Auch im Reellen war ja dies nur mit gewissen Einschränkungen der Fall, insofern nämlich, als mit $e^{1/m}$ nur der eine (positive) Wert von $\sqrt[m]{e}$ gemeint war. e^z ist ja eine eindeutige Funktion.

1) Es wurde wieder $c = 1$ gewählt.

2. Additionstheorem. Wir wollen nun vermittels des Multiplikationssatzes der Reihenlehre beweisen, daß auch im Komplexen

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{(z_1+z_2)},$$

daß also tatsächlich e^z eine der Haupteigenschaften der Potenzen besitzt. Multiplizieren wir aber die Reihen $\sum \frac{z_1^n}{n!}$ und $\sum \frac{z_2^n}{n!}$ miteinander, so kommt eine Reihe heraus, deren allgemeines Glied so aussieht:

$$\frac{1}{n!}\left(z_1^n + \frac{n!}{(n-1)!} z_1^{n-1} z_2 + \frac{n!}{(n-2)!\,2} z_1^{n-2} z_2^2 + \cdots + \frac{n!}{(n-h)!\,h!} z_1^{n-h} z_2^h + \cdots + z_2^n\right).$$

Das ist aber gleich

$$\frac{1}{n!}\left(z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \binom{n}{2} z_1^{n-2} z_2^2 + \cdots + z_2^n\right)$$

und also gleich $$\frac{1}{n!}(z_1 + z_2)^n.$$

Also wird tatsächlich

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}. \tag{1}$$

Namentlich ist also $$e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

3. Trigonometrische Funktionen. Analog wie die Exponentialfunktion *werden auch die trigonometrischen Funktionen im komplexen Gebiet durch Potenzreihen erklärt.* Wir setzen also

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots.$$

Diese Reihen sind ja durchweg konvergent, so daß also diese Funktionen überall im Endlichen analytisch sind. Aus dieser Erklärung folgt sofort die wichtige *Eulersche Gleichung*

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{2}$$

Daraus kann man entnehmen, daß

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{3}$$ und daß

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{4}$$

Der Gleichung (2) entnimmt man sofort, daß

$$e^{2h\pi i} = 1 \quad (h \text{ ganzzahlig}). \tag{5}$$

Nach (1) und (5) ist daher weiter

$$e^{z+2h\pi i} = e^z \cdot e^{2h\pi i} = e^z \quad (h \text{ ganzzahlig}). \tag{6}$$

Die Exponentialfunktion ist also eine periodische Funktion der Periode $2\pi i$, *ebenso wie die trigonometrischen Funktionen auch im Komplexen periodische Funktionen mit der Periode* 2π *sind.* Das letztere entnimmt man sofort aus der Darstellung (3), (4) der trigonometrischen Funktionen durch die Exponentialfunktion, wenn man an die Periodizität der Exponentialfunktion denkt.

Aus der Eulerschen Gleichung (2) liest man weiter ab, daß

$$e^{\pi i} = -1$$

ist. Daher ist auch im Komplexen

$$\cos(z + \pi) = -\cos z$$

und

$$\sin(z + \pi) = -\sin z,$$

wie wieder die Darstellung dieser Funktionen durch die Exponentialfunktion lehrt.

Ferner folgt aus der Eulerschen Gleichung (2) daß

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = i$$

Also gilt wieder

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$$

und

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin z.$$

Wir werden nun oft die Eulersche Formel benutzen, um die komplexe Zahl z in der Form

$$z = |z|\, e^{i \arg z}$$

zu schreiben. Bequem kommt ja in dieser Schreibweise der Multiplikationssatz zum Ausdruck:

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\, e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)}.$$

Auch die Formel $\quad e^{izn} = \cos nz + i \sin nz = (\cos z + i \sin z)^n$

ergibt sich von neuem. Folgerungen aus derselben zogen wir schon S. 1. Die Darstellung der trigonometrischen Funktionen durch die Exponentialfunktion zeigt so recht die Bedeutung des Komplexen fur das Studium der Funktionen selbst im Reellen insofern, als sonst ganz verschieden aussehende Funk-

tionen auf einmal unter einem allgemeinen Gesichtspunkt zusammengehoren. Aus dieser Darstellung ergibt sich auch sofort die also auch im Komplexen gultige Funktionalgleichung der trigonometrischen Funktionen

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

und

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$

Es ist ja

$$\cos(z_1 + z_2) + i \sin(z_1 + z_2) = e^{i(z_1+z_2)} = e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} = (\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2)$$

$$= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 + i(\cos z_1 \sin z_2 + \cos z_2 \sin z_1).$$

Analog wird

$$\cos(z_1 + z_2) - i \sin(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 - i(\cos z_1 \sin z_2 + \cos z_2 \sin z_1).$$

Durch Addition beider bzw. Subtraktion findet man dann die Additionstheoreme. *Auch das Differenzieren fuhrt zu den aus dem Reellen bekannten Ergebnissen, wie man sofort aus den Reihen erkennt.*

4. Abbildung durch die Exponentialfunktion. Wir gehen nun zu der durch die Exponentialfunktion vermittelten Abbildung uber. Dazu ist es bequem, $z = x + iy$ und $w = \varrho e^{i\vartheta}$ zu setzen. Dann wird

$$\varrho = e^x, \ \vartheta = y.$$

Daraus entnimmt man sofort, *daß die Geraden $x = c$ auf die Kreise $\varrho = e^c$, die Geraden $y = c$ auf die Speere $\vartheta = c$* abgebildet werden. Lassen wir namentlich die Gerado $y = c$, ausgehend von der reellen Achse, die obere Halbebene beschreiben. Der ganzen von $-\infty$ nach $+\infty$ durchlaufenen reellen Achse entspricht der Speer $\vartheta = 0$, also die positive reelle Achse der w-Ebene. Ruckt die Gerade in die obere Halbebene ein, so dreht sich der Bildspeer im positiven Sinn um den Nullpunkt der w-Ebene. Hat aber die Parallele zur reellen Achse der z-Ebene einen Streifen der Breite 2π uberstrichen, so hat der Bildspeer eine volle Umdrehung vollendet. Jedem Viertelstreifen entspricht ein Quadrant (Fig. 32 und 33). Lassen wir die Gerade der z-Ebene weiter in die obere Halbebene rucken, so beginnt der Bildspeer, ein neues Exemplar der w-Ebene zu uberstreichen. Wir heften es gleich an das ersterhaltene an, so wie der zweite Streifen am ersten hangt. Fahren wir so weiter und berucksichtigen auch die untere Halbebene, so

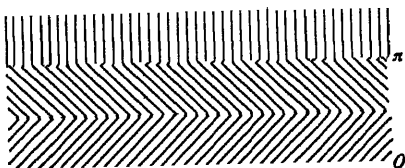



Fig 32

erhalten wir als Bild der z-Ebene eine unendlichvielblattrige Riemannsche Fläche, deren Windungspunkte von unendlicher Ordnung sind und bei $w = 0$ und bei $w = \infty$ liegen. Die Werte Null und Unendlich selbst nimmt die Exponentialfunktion $w = e^z$ an keiner endlichen Stelle der z-Ebene an. Denn wäre $e^z = 0$ fur endliches z, so wäre auch der Betrag e^x für endliches reelles x Null, was nicht angeht. Ebenso schließt man, daß der Wert ∞ nirgends angenommen wird.

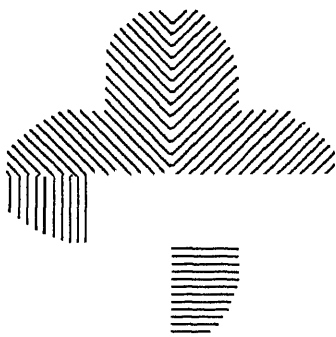



Fig. 33.

In der Umgebung von $z = \infty$ zeigt die Exponentialfunktion ein besonders merkwurdiges Verhalten. Sie nimmt nämlich in jeder Umgebung von ∞, also außerhalb eines jeden Kreises, jeden endlichen Wert außer Null an unendlich vielen Stellen an. Sie nimmt als periodische Funktion namentlich in jedem unserer Streifen außerhalb eines solchen Kreises jeden Wert genau einmal an. In den unendlich vielen Streifen, die noch außerhalb dieses Kreises liegen, wird also tatsächlich jeder Wert unendlich oft angenommen. Die Funktion besitzt also namentlich bei Annäherung an $z = \infty$ keinen Grenzwert, sie besitzt also da eine singuläre Stelle; aber das ist kein Pol; denn sonst mußte ja die Funktion $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$ einen Grenzwert besitzen (S. 49). Eine solche *Singularitat* nennt man eine *wesentliche* zum Unterschied von den *außerwesentlichen*, den Polen, die uns bisher begegneten. Ebenso haben $\sin z$ und $\cos z$ bei

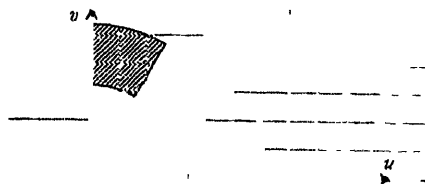



Fig. 34. Fig. 35.

∞ wesentlich singulare Stellen. Das folgt genau wie bei der Exponentialfunktion aus ihrer Periodizität.

Die durch $w = e^z$ vermittelte Abbildung ist durchweg *gebietstreu*. Dies leuchtet sofort ein, wenn man sich überlegt, wie die von Parallelen zu den Koordinatenachsen begrenzten Rechtecke der z-Ebene in Kreisbogenvierecke der w-Ebene übergehen (Fig. 34, 35).

5. Definition des Logarithmus. Die Umkehrungsfunktion der Exponentialfunktion heißt *Logarithmus*. Sie löst also die Aufgabe, zu jedem Punkte der

Riemannschen Fläche denjenigen Punkt der z-Ebene zu finden, aus dem er durch die Abbildung $w = e^z$ hervorging. Der log w ist somit *auf der Riemannschen Flache eindeutig* erklart, während er *in der w-Ebene* selbst *unendlich vieldeutig* ist. Die verschiedenen in einem Punkte der w-Ebene angenommenen Werte unterscheiden sich um Vielfache von $2\pi i$, weil in solchen um Vielfache von $2\pi i$ verschiedenen Punkten der z-Ebene die Exponentialfunktion denselben Wert annimmt. *Jede Zahl besitzt also unendlich viele Logarithmen, die sich um Vielfache von $2\pi i$ unterscheiden.* Die verschiedenen Zweige des Logarithmus erscheinen auf die verschiedenen Blätter der Flache so verteilt, daß die Funktion in jedem Punkte derselben nur einen Wert annimmt. Indessen ist diese Werteverteilung auf die Blatter nicht willkurlich vorgenommen, sondern so, wie es der Abbildung der z-Ebene auf die Flache entspricht. Das hat namentlich zur Folge, daß der Logarithmus eine stetige Funktion der Flache ist. Ein Kreisbogenviereck (Fig. 35) namlich wird durch $\log w = z$ auf das Rechteck der Fig. 34 abgebildet. Einer Verkleinerung des Vierecks entspricht eine Verkleinerung des Rechtecks. Daher vermittelt der Logarithmus eine stetige gebietstreue Abbildung. In jedem Kreise der w-Ebene, welcher den Punkt $w = 0$ nicht enthalt, sind samtliche Zweige des Logarithmus eindeutig erklart. Denn uber einem jeden solchen Kreise liegt in einem jeden Blatt ein Teilkreis der Flache, in welchem je ein Zweig des Logarithmus eindeutig erklärt ist. Jeder dieser Zweige hangt nicht nur stetig von w ab, sondern ist sogar eine differenzierbare Funktion (S. 35). Es ist ja

$$\lim_{\Delta w \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}.$$

Daher wird

$$\frac{d \log w}{dw} = \frac{1}{w},$$

und also ist jeder Zweig des Logarithmus eine in jedem Kreise eindeutig und analytisch erklarte Funktion, solange der Punkt $w = 0$ dem Kreis nicht angehort.

6. Wertänderung des Logarithmus auf geschlossenen Wegen. Wir wollen nun noch feststellen, welche Wertanderung der Logarithmus $z = \log w$ erfahren kann, wenn sein Argument eine einfach geschlossene[1]) stetige Kurve seiner Ebene durchläuft. Zu dem Ende denken wir uns die Kurve $\mathfrak{C}$ auf die einzelnen Blätter der Riemannschen Fläche gelegt (in unendlich vielen Exemplaren) und samt dieser auf die z-Ebene abgebildet. Aus einem Exemplar der

1) D. h. doppelpunktfreie. Eine genaue allgemeine Begriffsbestimmung wird auf S. 90 gegeben. Augenblicklich mag die landlaufige Vorstellung genugen.

Kurve 𝔈 wird dann ein Kurvenbogen 𝔈′, der in einem Punkte a beginnen möge und in einem Punkte $a + h2\pi i$ endigt. Selbstuberkreuzungen weist der Bogen nicht auf, er muß wie sein Original 𝔈 einfach und stetig sein. Für h sind dann nur die Werte $0, +1, -1$ moglich. Denn der Kurvenbogen 𝔈′ kann keine zwei von seinen Enden verschiedene Punkte passieren, die sich um Vielfache von $2\pi i$ unterscheiden. Denn ihnen wurde in der w-Ebene derselbe Punkt entsprechen. Das wäre eine Selbstuberkreuzung. Ein Paar um $2\pi i$ verschiedener Punkte mußte aber sicher auftreten, wenn h einen anderen als einen der drei angegebenen Werte hatte. Denn wenn man die Kurve 𝔈′ mit Parallelen zur y-Achse schneidet, so kamen dann fur die Abstände der Schnittpunkte wegen der Stetigkeit von 𝔈′ alle Werte zwischen $|h|\,2\pi$ und Null vor.

Wenn weiter eine *beliebige* (also nicht notwendig einfach) geschlossene orientierte, d. h. mit einer Durchlaufungsrichtung versehene stetige Kurve 𝔈:

$$w = w(t) \quad (t_0 \leqq t \leqq t_1;\ w(t) \text{ stetig}),$$

welche $w = 0$ und $w = \infty$ nicht trifft, gegeben ist, so markiere man auf ihr irgendeinen Punkt a, lege dort $\log a$ einen seiner Werte bei und verfolge die stetige Anderung, die von a und dem Werte $\log a$ ausgehend $\log w$ bei Durchlaufung der Kurve in der vorgeschriebenen Richtung erfahrt. Wenn w nach a zuruckgelangt ist, so hat $\log w$ um ein Vielfaches von $2\pi i$ zugenommen. Dieses Vielfache ist von dem Werte des Logarithmus, fur den man sich im Punkte a entschieden hat, unabhangig. Denn ware man von einem Werte $\log a$ ausgegangen, der um ein Vielfaches von $2\pi i$ anders gewesen ware, so waren alle Werte des Logarithmus, welchen man bei Durchlaufung der Kurve begegnet, um *dasselbe* Vielfache von $2\pi i$ anders gewesen. Auch von der Wahl des Punktes a ist der Zuwachs des Logarithmus unabhangig. Denn verschiebt man a längs der Kurve, so muß sich die Wertanderung stetig mit a andern, wahrend sie doch ein *ganzes* Vielfaches von $2\pi i$ ist.

Diese Betrachtungen fuhren zu der folgenden, weiterhin sehr wichtigen *Definition. Man sagt, eine stetige geschlossene orientierte Kurve umlaufe $h$mal den Punkt $w = \zeta$, wenn $\log(w - \zeta)$ bei Durchlaufung der Kurve in der vorgeschriebenen Richtung um $h2\pi i$ wachst. Namentlich sagt man, die Kurve umlaufe ζ im positiven Sinne, wenn h positiv ist. Sie umläuft ζ im negativen Sinne, wenn h negativ ist. Sie umschließt ζ gar nicht, wenn $h = 0$ ist.*

Durch diese Definition soll also weiterhin festgelegt sein, in welchem Sinne die hier eingefuhrten Umlaufungsbegriffe gebraucht werden sollen.

Wenn in der w-Ebene eine zusammenhangende[1]) *Punktmenge gegeben ist, welche 𝔈 nicht trifft, so umschließt entweder 𝔈 keinen ihrer Punkte oder 𝔈 um-*

1) Eine genaue Begriffsbestimmung folgt auf S. 83. Hier kann die landläufige Vorstellung genugen, die man mit diesen Worten verbindet.

schließt alle in demselben Sinne. Sei nämlich ζ ein Punkt der Menge, so kommt es auf die Wertänderung an, welche $\log(w-\zeta)$ bei Durchlaufung von $\mathfrak{C}$ erfahrt. Diese Wertänderung hängt aber stetig von ζ ab, solange ζ nicht auf der Kurve liegt. Da aber für die Wertänderung nur Vielfache von $2\pi i$ in Frage kommen, so ist diese stetige Funktion konstant.

7. Zerlegung der Ebene durch ein Polygon. Im Rahmen dieser Betrachtungen ist es nun auch leicht möglich, zu beweisen, daß ein *jedes einfach* (d. h. ohne Selbstüberkreuzung) *geschlossene Polygon die Ebene in zwei Bereiche,* das Innere und das Äußere des Polygones, *zerlegt.* Wir versehen dazu das Polygon mit einem Durchlaufungssinn. Ist dann ζ irgendein nicht auf dem Polygon gelegener Punkt, so erfährt $\log(w-\zeta)$ bei Durchlaufung des Polygones P einen Zuwachs $\varepsilon(P,\zeta)2\pi i$. Dabei kann $\varepsilon(P,\zeta)$ eine der Zahlen 0 oder 1 oder -1 bedeuten. Denkt man sich nun ζ variabel, so bleibt, wie vorhin dargelegt wurde, $\varepsilon(P,\zeta)$ ungeändert, solange ζ nicht auf das Polygon selbst zu liegen kommt. Wenn man aber nun ζ eine der das Polygon bildenden Strecken AB überschreiten laßt, so ändert sich, wie wir jetzt sehen wollen, ε um eine Einheit. In Fig. 36 seien ζ_1 und ζ_2 zwei Lagen des Punktes ζ zu beiden Seiten der durch A und B gehenden Polygonseite. Ich betrachte das Dreieck ABC, das keinen Punkt der Polygonkurve enthalten möge. ζ_2 sei in seinem Inneren gewählt, ζ_1 sei so gelegen, daß die Strecke $\zeta_1\zeta_2$ die Strecke AB, aber im übrigen die Polygonkurve P nicht trifft. Neben dem Polygon P betrachte ich noch das Polygon P_1, das aus ihm dadurch hervorgeht, daß ich die Strecke AB durch den Linienzug ACB ersetze. Dann ist $\varepsilon(P,\zeta_1)=\varepsilon(P_1,\zeta_1)$, weil bei Durchlaufung des Dreieckes ABC der $\log(z-\zeta_1)$ ungeändert bleibt Ich kann nämlich die Durchlaufung des Polygones P ersetzen durch die des Polygones P_1, wenn ich nur *dann* noch das Dreieck $BCAB$ in der Richtung $BCAB$ durchlaufe. Denn dann ist im ganzen der Zug BAC zweimal nacheinander in verschiedener Richtung durchlaufen. Und das bedeutet eine Wertänderung Null für den Logarithmus (s. die Fig. 36). Weiter ist aber $\varepsilon(P_1,\zeta_1)=\varepsilon(P_1,\zeta_2)$. Denn die Strecke $\zeta_1\zeta_2$ trifft ja das Polygon P_1 nicht. Weiter aber erfährt $\log(w-\zeta_2)$ bei Durchlaufung des Dreieckes $BCAB$ in dem durch die Reihenfolge der Ecken bezeichneten Sinn eine Änderung von der Größe $\pm 2\pi i$ je nach dem Umlaufssinn des Dreieckes. Daher ist nun

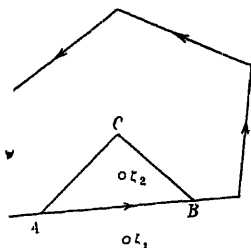



Fig 36.

$$\varepsilon(P,\zeta_2)=\varepsilon(P_1,\zeta_2)+\varepsilon(\Delta,\zeta_2)=\varepsilon(P_1,\zeta_1)\pm 1=\varepsilon(P,\zeta_1)\pm 1.$$

Wenn also $\varepsilon(P,\zeta_1)=0$ oder $=1$ oder $=-1$ ist, so wird im ersten Fall $\varepsilon(P_1\zeta_2)=1$ oder $=-1$, im zweiten gleich 2 oder 0, im dritten gleich 0 oder

-2. Da aber ε nur die Werte 0, 1, -1 annehmen kann, bleiben nur zwei Möglichkeiten übrig. Der eine der beiden Werte, die $\varepsilon(P, \zeta)$ annehmen kann, ist also stets Null, und der andere ist je nach der Durchlaufungsrichtung des Polygones ± 1. Die Punkte, für welche Null herauskommt, machen das Äußere, die anderen das Innere des Polygones aus. Diese Benennung rechtfertigt sich dadurch, daß zur ersten Sorte jedenfalls alle Punkte gehören, welche außerhalb eines das Polygon umschließenden Kreises liegen. Denn sei ζ ein solcher Punkt, so ist jeder Zweig des $\log(w - \zeta)$ im Inneren eines solchen Kreises eindeutig.

Die Punkte einer jeden Sorte machen auch tatsächlich einen einzigen Bereich aus. Wenn nämlich eine Polygonseite an der Grenze eines Bereiches beteiligt ist, so trifft dies auch für die benachbarten Seiten zu. Denn man kann um eine Ecke, in der zwei solcher Seiten aneinanderstoßen, einen Kreis schlagen, in den nur diese beiden Polygonseiten eindringen. Sie zerlegen ihn in zwei Sektoren, von denen der eine ganz dem in Rede stehenden Bereich angehört. Da gleichzeitig in jeder Polygonseite nicht mehr als zwei Bereiche aneinanderstoßen können, so kann das Polygon nicht mehr als zwei Bereiche bestimmen. Diese beiden aber haben wir eben schon festgestellt, denn Punkte mit verschiedenem ε können nicht demselben Bereich angehören.

Unsere Betrachtung lehrt weiter, *daß ein Polygon einen inneren Punkt dann in positivem Sinne umschließt, wenn man seinen Rand so durchläuft, daß das Innere zur Linken bleibt.*

Die Richtigkeit dieser Behauptung kann man bei Dreiecken ohne weiteres bestätigen. An Hand der Fig. 36 kann man aber daraus auf beliebige Polygone schließen. Denn dort lernten wir, daß eine Überschreitung der Strecke AB eine Änderung von ε um ± 1 zur Folge hat. Man kann nun mehrere Fälle unterscheiden, je nachdem ob das wandernde ζ in das Dreieck eintritt oder es verläßt, je nachdem das Dreieck positiv oder negativ umlaufen ist. Das sind im ganzen vier Fälle Nehmen wir nun z. B. an, ζ wandere aus dem Polygonaußeren in das Polygoninnere und rücke etwa gleichzeitig vom Dreiecksaußeren in das Dreiecksinnere. Dabei geht somit ε vom Werte Null entweder in den Wert $+1$ oder in den Wert -1 über. Im ersten Fall muß somit gemaß dem gerade über Dreiecke Gesagten das Dreieck positiv, im anderen Falle negativ umlaufen sein. Dann liegt also im ersten Falle das Schluß-ζ links von der Richtung AB, im anderen Falle rechts. Und damit ist bewiesen, daß es dem positiven Umlaufsinn, d. h. dem $\varepsilon = +1$ entspricht, daß das Polygoninnere links von jeder orientierten Polygonseite liegt. Ebenso schließt man in den drei anderen Fällen.

Durchläuft man den vollen Rand eines *beliebigen* polygonalen Bereiches so, daß dabei das Innere zur Linken bleibt, einmal, so hat man dabei jeden inneren

Punkt a genau einmal positiv umlaufen. $\log(z-a)$ nimmt nämlich bei Durchlaufung des äußeren Randpolygones[1]) gerade um $2\pi i$ zu und bleibt bei Durchlaufung des inneren Randpolygones ungeändert.

Bemerkungen. 1. Ganz ähnlich zeigt man, daß ein nicht geschlossener Polygonzug ohne Selbstüberkreuzung die Ebene nicht zerlegen kann. Denn wieder muß der ganze Zug an jeder Bereichgrenze teilhaben. Aber um die Polygonenden kann man jetzt etwa durch einen Kreisbogen herumkommen.

2. Der Satz nebst Beweis, d. h. unsere ganzen Betrachtungen können unverändert auf einfach geschlossene Kreisbogenpolygone übertragen werden. Das sind Polygone, deren Seiten statt aus Geraden aus Kreisbogen bestehen.

3. Die Transformation $w = \frac{1}{z-a}$ lehrt, daß die die Zerlegung der Ebene betreffenden Ergebnisse auch gelten, wenn die Polygone sich ins Unendliche erstrecken. Denn durch $w = \frac{1}{z-a}$ kann man solche Polygone, die ∞ auf einer ihrer Seiten und a im Äußeren haben, sofort in endliche Kreisbogenpolygone transformieren.

4. Beachtet man noch, daß $\log w = \log |w| + i \arg w$ und daß der reelle $\log |w|$ eindeutig ist, so kann man unsere Überlegungen und Erklärungen auch auf die Werteänderung aufbauen, welche $\arg w$ bei Durchlaufung einer Kurve erfährt. Das pflegt man zu tun, wenn man die Lehre von den Bereichen losgelöst von der Funktionentheorie entwickelt.

§ 8. Hilfssätze über Bereiche und Kontinua.[2])

Einer gleich noch auf den Logarithmus zu machenden Anwendung zuliebe wollen wir jetzt schon einige naheliegende, aber sehr wichtige und grundlegende Sätze über Bereiche und Kontinua herleiten.

1. Zusammenhängende Mengen. Was man unter einer abgeschlossenen Menge versteht, wurde schon auf S. 22 erklärt. *Wenn nun eine abgeschlossene*

1) Unter den Rändern eines (endlichen) polygonalen Bereiches gibt es genau einen, der alle anderen im Inneren enthält. Denn gäbe es *keinen* solchen, so enthielte der Bereich nur Außenpunkte eines jeden seiner Ränder, bestünde also aus der vollen Ebene mit Ausschluß der Innenpunkte gewisser Polygone, wäre also nicht endlich. Ferner aber kann der Bereich auch nicht dem Inneren *mehrerer* seiner Randpolygone angehören. Denn träfe dies für zwei Randpolygone zu, müßte so jedes derselben dem Inneren des anderen angehören. Wenn aber das Polygon π_1 in π_2 liegt, so gehören dem Inneren von π_2 auch Außenpunkte von π_1 an. Wenn aber π_2 in π_1 läge, so könnte man diese Außenpunkte mit dem Unendlichfernen verbinden, ohne π_2 zu treffen. Da aber das Unendlichferne sicher außerhalb π_2 liegt, so hätte man damit einen Innenpunkt von π_2 mit einem Außenpunkt von π_2 verbunden, ohne π_2 zu treffen, was widersinnig ist.

2) Bei der ersten Lektüre kann auch § 8 überschlagen werden. In diesem § 8 ist nur von schlichten, d. h. einblättrigen Bereichen die Rede.

Menge von komplexen Zahlen oder von Punkten der Gaußschen Ebene[1]) *außerdem noch zusammenhängt und mehr als einen Punkt enthält, so nennen wir sie ein* K o n t i n u u m. Den *Begriff der zusammenhängenden Menge* aber kann man noch auf zwei verschiedene Weisen erklären. Man kann *erstens* so definieren: *Eine abgeschlossene Menge heißt zusammenhängend, wenn man sie nicht in zwei nicht leere abgeschlossene punktfremde Teilmengen*[2]) *zerlegen kann.* Das Intervall $J: a \leqq x \leqq b$ ist also z. B. eine zusammenhängende Menge. Denn seien etwa M_1 und M_2 die beiden abgeschlossenen Teilmengen, in die wir uns für den Fall, daß die Behauptung unrichtig wäre, das Intervall zerlegt denken wollen, dann gäbe es sicher in der Teilmenge M_1 einen Punkt P, der nicht samt allen ihm in J benachbarten Punkten der Menge M_1 angehörte.[3]) Dann gäbe es also in beliebiger Nähe desselben Punkte der Strecke, welche der zweiten Teilmenge M_2 angehörten. Daher wäre P ein Häufungspunkt von Punkten aus M_2 und gehörte daher auch M_2 an, weil diese Menge abgeschlossen sein soll. Daher wären M_1 und M_2 nicht punktfremd. Aus dieser Darlegung folgt, daß ein jeder Polygonzug eine zusammenhängende Menge ist. Ebenso ist jede stetige Kurve $z = z(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ eine zusammenhängende Menge, wie man ja aus ihrer Abbildung auf die Strecke $a \leqq t \leqq b$, wie sie $z = z(t)$ vermittelt, sofort erkennt. Denn einer Zerlegung der Kurve in zwei abgeschlossene punktfremde Mengen entspräche eine ebensolche Zerlegung der Strecke.

Die *zweite Erklärung* des Begriffes zusammenhängende Menge erstreckt sich im Gegensatz zu der eben angeführten auf beliebige (nicht nur auf abgeschlossene) Mengen, stimmt aber für abgeschlossene Mengen mit der eben gegebenen überein. Die zweite Erklärung beruht nämlich auf dem Begriff „ε-zusammenhängend", dieser auf dem Begriff „ε-Kette". $z_1, \ldots z_n$ sei eine endliche Menge von komplexen Zahlen, derart, daß die Differenz irgend zweier aufeinanderfolgender $|z_{k+1} - z_k| \leqq \varepsilon$ $(k = 1, 2 \ldots n - 1)$ ist. Dann sagt man, $z_1 \ldots z_n$ bildeten eine ε-Kette, welche z_1 und z_n verbindet. Eine Menge nun, in der man irgend zwei Punkte durch eine der Menge angehörige ε-Kette verbinden kann, heißt *ε-zusammenhängend.* Wenn eine Menge weiter für alle ε „ε-zusammenhängend" ist, so heißt sie *zusammenhängend* schlechthin.

Uns interessiert hier diese Begriffsbildung nur für abgeschlossene Mengen. Es zeigt sich, daß *eine abgeschlossene Menge, die nach der einen Definition zusammenhängend ist, auch nach der anderen zusammenhängend ist.* Denn wenn

1) Wir nehmen fortan stets an, daß sie durch den Punkt $z = \infty$ erweitert ist.

2) D. h. Teilmengen ohne gemeinsamen Punkt.

3) Denn seien Q_1 und Q_2 zwei Punkte der Strecke, deren einer zu M_1, deren anderer zu M_2 gehört. Dann betrachte ich die zu M_1 gehörigen Punkte der Strecke Q_1Q_2. Unter diesen gibt es einen, P, dessen Entfernung von Q_2 ein Minimum ist. Somit können nicht alle ihm in J benachbarten Punkte zu M_1 gehören.

man z. B. eine abgeschlossene Menge in zwei punktfremde abgeschlossene Teilmengen M_1 und M_2 zerlegen kann, so besitzen diese beiden einen von Null verschiedenen Abstand.[1]) Denn das Minimum der Abstände: „Punkt aus M_1 gegen Punkt aus M_2“ kann nicht Null sein, weil die beiden Mengen punktfremd sein sollen. Sei dann a der Abstand der beiden Teilmengen, so kann man keinen Punkt aus M_1 mit einem Punkt aus M_2 durch eine ε-Kette verbinden, in der $\varepsilon < a$ ist. Denn in dieser Kette müßte es zwei aufeinanderfolgende Punkte geben, den einen aus M_1, den anderen aus M_2, deren Abstand höchstens ε, also kleiner als a wäre. Wenn umgekehrt zwei Punkte P und Q durch eine ε-Kette verbunden werden können, so muß der Abstand irgend zweier ε-zusammenhängenden Mengen, welchen P und Q angehören sollen, dieses ε übertreffen. Wenn also eine abgeschlossene Menge für ein ε nicht „ε-zusammenhängend“ ist, so kann sie in zwei abgeschlossene Teilmengen zerlegt werden. Man hat nur etwa als Menge M_1 alle die Punkte zu nehmen, die mit P durch eine ε-Kette verbunden werden können, als Menge M_2 alle anderen Punkte.

Nach diesen Begriffsbestimmungen gehen wir zu einigen Sätzen über.

2. Sätze über Kontinua. Satz I. *Wenn ein Kontinuum K sowohl Punkte aus dem Inneren als Punkte aus dem Äußeren eines Polygones*[2]) *Π enthält, so kommen in ihm auch Punkte von Π selbst vor.*

Denn sonst würde durch das Polygon Π das Kontinuum in zwei abgeschlossene punktfremde Mengen zerlegt. Die Punkte des Kontinuums nämlich, welche dem Inneren des Polygones angehören, müssen eine abgeschlossene Menge ausmachen, wenn wirklich kein Punkt von K auf Π liegen soll. Denn alle Häufungspunkte von Punkten des K aus dem Inneren von Π müssen dann selbst dem Inneren angehören. Ebenso ist es mit der Menge der Außenpunkte von K. Beide Mengen sind punktfremd, weil ein gemeinsamer Punkt nur auf Π liegen könnte. Das alles widerspricht aber dem Begriff des Kontinuums.

Satz II. *Der Rand eines Bereiches trennt den Bereich von der Komplementärmenge, d. h. von der Menge derjenigen Punkte, welche weder dem Bereich noch seinem Rande angehören.* Der Satz ist dem eben bewiesenen ganz analog und fast mit denselben Worten wie dieser beweisbar

1) Unter dem Abstand zweier Mengen M_1 und M_2 versteht man die untere Grenze (bei abgeschlossenen Mengen das Minimum) der Abstände PQ für irgendein Punktepaar (P aus M_1, Q aus M_2). Vgl. auch S. 22, wo wir schon einmal in einem speziellen Fall den Begriff des Abstandes verwendet haben Da wir hier auch $z = \infty$ mit betrachten, denken wir uns alle Mengen durch stereographische Projektion auf eine Kugel übertragen und betrachten den sphärischen Abstand, d. h. die Länge des kleinsten zwei Punkte verbindenden Großkreisbogens.

2) Alle fortan vorkommenden Polygone und Streckenzüge sollen *einfache* Kreisbogenpolygone sein, d. h frei von Doppelpunkten.

Satz III. *Es sei eine abgeschlossene Menge K_1 und ein zu ihr punktfremdes Kontinuum K_2 gegeben. Man kann stets einen polygonalen (d. h. von Polygonen begrenzten) Bereich konstruieren, der das Kontinuum K_2 enthält, und der die Menge K_1 ausschließt.*

Zum Beweise denken wir uns die beiden Mengen durch stereographische Projektion auf eine Kugel übertragen und ziehen den sphärischen Abstand a der beiden Mengen heran. Alsdann betrachte ich endlich viele[1]) Kreisscheiben vom sphärischen Radius $\frac{a}{4}$, welche ganz K_2 bedecken. Diese Kreisscheiben machen dann eine gewisse Punktmenge aus. Diese besteht aus einigen Gebieten. Innere Punkte derselben sind diejenigen Punkte, die dem Inneren mindestens einer Kreisscheibe angehören, Randpunkte, die übrigen Randpunkte der Kreisscheiben. Einem der Gebiete muß das Kontinuum K_2 ganz angehören. Denn kein Randpunkt der Gebiete kann K_2 angehören. Dieser Bereich ist es, dessen Existenz der Satz behauptet. Ist insbesondere auch K_1 ein Kontinuum, so muß *eines* seiner Randpolygone K_1 und K_2 trennen. So gewinnen wir das *Corrolar: Man kann stets ein einfaches Polygon angeben, das zwei punktfremde Kontinua voneinander trennt.*

Nun müssen wir wieder einige neue Begriffe einführen. *Ein Bereich heißt einfach zusammenhängend, wenn die Menge seiner Randpunkte leer oder ein Kontinuum ist, zweifach zusammenhängend, wenn sie aus zwei Kontinuen besteht usw.*

Satz IV. *Wenn B ein einfach zusammenhängender Bereich mit mindestens einem Randpunkt und K eine ihm angehörige abgeschlossene Menge ist, so kann*

1) Daß man endlich viele Kreisscheiben vom Radius $\frac{a}{4}$ angeben kann derart, daß jeder Punkt von K_2 dem Inneren mindestens einer derselben angehört, ist der Inhalt des Heine-Borelschen Überdeckungssatzes. Zunächst nämlich kann man abzählbar viele solche Kreisscheiben angeben, nämlich die Kreisscheiben mit Punkten rationaler Koordinaten als Mittelpunkt. Denn eine Kreisscheibe vom Radius $\frac{a}{8}$ um einen beliebigen Punkt als Mittelpunkt gehört immer einer Kreisscheibe vom Radius $\frac{a}{4}$ mit passendem rationalen Mittelpunkt an. Von diesen abzählbar vielen Kreisscheiben behalte man nur diejenigen bei, welche Punkte von K_2 enthalten und numeriere sie irgendwie. Dann ordne man jedem Punkt die kleinste Nummer zu, zu der eine ihn enthaltende Kreisscheibe gehört. Gäbe es keine Nummer N derart, daß jeder Punkt von K_2 einer Kreisscheibe mit kleinerer Nummer angehört, so betrachte man eine Folge von Punkten aus K_2, deren zugeordnete Nummern über alle Grenzen wachsen. Sie besitzen einen Häufungspunkt P in K_2. Ihm ist eine Kreisscheibe mit einer gewissen Nummer N_1 zugeordnet, der alle Punkte von K_2 aus einer gewissen Umgebung von P angehören. Die ihnen zugeordneten Nummern können also N_1 nicht übertreffen, während es darunter Punkte mit beliebig großen zugeordneten Nummern geben sollte.

man stets in B ein Polygon Π konstruieren, das K vom Rand R des Bereiches B trennt.

Der Satz kann naturlich nur fur abgeschlossene K gelten, weil sonst Punkte von R zu den Häufungspunkten von K zahlen konnten. Dann konnte man nicht zwischen K und R mit einem Polygon durchkommen. Unter unseren Voraussetzungen aber ist der Abstand zwischen K und R von Null verschieden.

Der Beweis ergibt sich aus dem vorhin bewiesenen allgemeinen Satz III sofort, falls K ein Kontinuum ist. Man bemerke dann, daß R ein Kontinuum ist. Daß aber das nach dem Corrolar von Satz III konstruierte Polygon dem Bereich angehört, folgt so: Da die Vereinigungsmenge von B und R, also der abgeschlossene Bereich, ein Kontinuum ist, das sowohl im Inneren wie im Außeren von Π Punkte besitzt, so liegen auch auf Π Bereichpunkte (Randpunkte konnen ja da nicht liegen). Daher liegt Π ganz in B, da sonst nach Satz II Π auch Punkte von R enthalten mußte. Ist aber K kein Kontinuum, so sei d sein Abstand von R. Man bedecke K mit endlich vielen[1]) Kreisen vom Radius $\frac{d}{2}$. Diese Kreise machen endlich viele Kontinua aus, die man durch B angehorige Polygonzuge zu einem einzigen Kontinuum verbinde. Nun schließe man wie vorhin weiter.

Satz V. *Wenn in einem zweifach zusammenhangenden Bereich B mit den Randern R_1 und R_2 eine abgeschlossene Menge K liegt, so gibt es stets einen von zwei B angehörigen Polygonen Π_1 und Π_2 begrenzten zweifach zusammenhangenden Polygonring, der K enthalt, R_1 und R_2 aber ausschließt.*

Zum Beweise trenne ich zunachst die abgeschlossene Vereinigungsmenge $R_1 + K$ nach Satz IV durch ein Polygon Π_1 vom Kontinuum R_2. Dieses Polygon liegt in B. Alsdann trenne ich ebenso $K + R_2 + \Pi_1$ von R_1. Beide Polygone trennen dann R_1 von R_2. Das eine trennt K von R_1, das andere K von R_2. K muß daher dem von beiden Polygonen begrenzten zweifach zusammenhangenden Ring angehoren.

3. Querschnitte. Satz VI. *Ein Querschnitt, d. i. ein Polygonzug ohne Selbstuberkreuzung, welcher zwei Randpunkte eines einfach zusammenhangenden Bereiches im Bereiche miteinander verbindet, zerlegt den Bereich in zwei einfach zusammenhangende Teilbereiche.*

Jedenfalls kann er ihn nicht in mehr als zwei Teilbereiche zerlegen, weil an der Grenze eines jeden nach einer schon S. 82 angestellten Uberlegung der volle Polygonzug (Querschnitt) teilnimmt und an jede Polygonseite hochstens zwei Bereiche angrenzen. Querschnitt und bisherige Bereichgrenze bilden ein Kontinuum. Ich nehme an, der Satz sei falsch und greife eine Strecke des

1) cf. Fußnote 1 S. 86.

Querschnittes heraus derart, daß der uber ihr als Durchmesser errichtete Kreis nur Bereichpunkte enthalt.

Wenn man nun im Mittelpunkt des Kreisdurchmessers nach beiden Seiten Lote auf dem Durchmesser errichtet, die kurzer als der Kreisradius sind, so zerfällt bekanntlich keiner der Halbkreise. Vielmehr geht jeder in einen neuen Bereich uber, dessen Grenze nun von dem alten Halbkreis, dem Durchmesser und dieser Lotstrecke gebildet wird. Nun lassen wir den Kreis wieder weg und ziehen den Schluß, daß durch Anbringung jener Lote auch der von altem Polygon und Querschnitt begrenzte Bereich nicht zerfallen kann. Denn seien etwa P_1 und P_2 zwei Punkte eines von altem Rand und vom Querschnitt bestimmten Bereiches und Π ein Polygonzug, der beide in diesem Bereiche verbindet, der also namentlich den Querschnitt nicht trifft. Die einem Halbkreis angehorigen Teile desselben kann man aber nach dem eben Gesagten durch Streckenzuge des Halbkreises ersetzen, die das Lot nicht treffen. Wenn daher der Querschnitt das Polygon nicht zerlegte, so wurde auch durch Anbringung der Lote keine Zerlegung bewirkt. Man könnte daher die Lotenden durch einen Polygonzug des Bereiches verbinden, welcher also das aus Querschnitt, Rand und Loten bestehende Kontinuum sonst nicht trifft. Denn dies Kontinuum ist die neue Bereichgrenze. Dieser Polygonzug macht zusammen mit den beiden Loten ein einfach geschlossenes Polygon Φ aus. Sowohl seinem Inneren wie seinem Außeren gehören Punkte des Querschnittes an, weil der Kreisdurchmesser vom Äußeren ins Innere ubergeht. Laßt man diesen Durchmesser also vom Querschnitt weg, so zerfallt er in zwei Teilzuge, deren einer dem Inneren, deren anderer dem Außeren von Φ angehort. Daher zerlegt das Polygon das Kontinuum, bestehend aus altem Rand und den zwei noch ubriggebliebenen Streckenzugen des Querschnittes, in zwei abgeschlossene Teilmengen. Das widerspricht aber der Natur eines Kontinuums.

Erweiterung. *Der eben bewiesene Satz laßt sich auf zweifach zusammenhangende Bereiche übertragen, wenn man Querschnitte betrachtet, welche, wie eben, zwei Punkte derselben Randkurve verbinden.*

Satz VII. *Wenn aber der Querschnitt zwei verschiedene Randkurven*[1] *R_1 und R_2 eines mehrfach zusammenhangenden Bereiches verbindet, so zerlegt er den Bereich nicht.*

Zum Beweise nehme ich wieder eine Teilstrecke des Polygonzuges weg. Dann bildet der Rand R_1 zusammen mit dem einen noch verbleibenden Stuck des Querschnittes ein Kontinuum, ebenso bildet R_2 mit dem anderen noch verbleibenden Stück des Querschnittes und den ubrigen Randpunkten eine ab-

1) Darunter verstehe ich zwei in sich zusammenhangende Mengen von Randpunkten, die aber nicht ein und derselben zusammenhangenden Menge von Randpunkten angehoren.

geschlossene Menge. Ich zeichne nun nach Satz III einen Polygonzug, der die beiden Mengen trennt. Das vorhin weggelassene Stück des Querschnittes verbindet daher das Polygoninnere mit dem Polygonäußeren, trifft also das Polygon und hat eine gewisse Anzahl von Kontinua (Punkte und Strecken) mit demselben gemeinsam. Ich durchlaufe das Polygon und markiere den ersten und den letzten Treffpunkt mit dem Querschnitt. Diese zerlegen das Polygon in zwei Streckenzüge, deren jeder die beiden Seiten des Querschnittes miteinander verbindet[1]), und deren einer den Querschnitt nicht trifft. Derselbe zerlegt daher den Bereich nicht. War vielmehr der gegebene Bereich zweifach zusammenhängend, so ist der vom alten Rand und dem Querschnitt begrenzte Bereich einfach zusammenhängend, denn dieser Rand und der Querschnitt machen ein Kontinuum aus. Aus einem dreifach zusammenhängenden Bereich aber macht der Querschnitt einen zweifach zusammenhängenden.

Zusatz. Wenn man unter einem *Einschnitt* eines Bereiches einen Polygonzug aus dem Bereich versteht, der einen Bereichpunkt mit dem Rande verbindet, so zerlegt ein Einschnitt keinen Bereich, ändert nicht einmal seinen Zusammenhang. Wenn man nämlich etwa aus einem einfach zusammenhängenden Bereich einen seiner Punkte wegläßt, so wird aus ihm ein zweifach zusammenhängender Bereich. Verbindet man dann diesen Punkt mit dem Rande, so ist dieser Einschnitt des alten Bereiches ein Querschnitt des neu entstandenen zweifach zusammenhängenden, verwandelt diesen also wieder in einen einfach zusammenhängenden Bereich.

Satz VIII. *Ein dreifach zusammenhängender Bereich möge aus einem Polygon Π dadurch entstanden sein, daß zwei getrennte, dem Inneren des Polygones angehörige zusammenhängende abgeschlossene Mengen entfernt werden. Man kann alsdann einen Querschnitt angeben, welcher das Polygoninnere in zwei Polygone zerlegt, deren eines die eine, deren anderes die andere der beiden eben genannten Mengen in seinem Inneren enthält*

Zum Beweise verbinde man die beiden genannten Mengen M_1 und M_2 durch zwei einander nicht treffende Einschnitte mit dem Polygonrande.[2]) Der so entstehende einfach zusammenhängende Bereich sei B. Ihre Mündungspunkte

1) Der eine trifft das Querschnittstück in einer ungeraden Zahl von Kontinua und besitzt daher die angegebene Eigenschaft Daher liegen auch Anfang und Ende des anderen Streckenzuges auf verschiedenen Querschnittseiten

2) Man wähle auf Π zwei Punkte P_1 und P_2 und verbinde diese mit genügend benachbarten Bereichpunkten P'_1 und P'_2 durch Strecken, die M_1 und M_2 nicht treffen. In dem Bereich, der von Π, M_2 und der Strecke $P_2P'_2$ begrenzt wird, verbinde man dann P'_1 mit M_1 durch einen Polygonzug. Aus dem Streckenzug $P_1P'_1M_1$ kann man durch eventuelles Weglassen überflüssiger Strecken einen P_1 mit M_1 verbindenden Einschnitt E_1 machen In dem von Π, E_1, M_1 begrenzten Bereich verbinde man dann P'_2 mit M_2 und stelle so den zweiten Einschnitt E_2 her.

auf dem Polygon seien P_1 und P_2. Diese Punkte zerlegen das Polygon in zwei Teilbogen. Auf jedem derselben markiere man einen Punkt: Q_1 und Q_2. Diese bestimmen zwei Bogen Π_1 und Π_2 des Polygones, deren einem P_1, deren anderem P_2 angehort. Die beiden Punkte Q_1 und Q_2 verbinde man nun durch einen dem Bereich B angehorigen Streckenzug Π miteinander. Dieser Querschnitt bewirkt die gewunschte Zerlegung. Denn Π und Π_1 begrenzen ein Polygon, dessen Innerem M_1 angehort. P_1 gehört namlich seinem Rande an, und von P_1 aus gelangt man langs des vorhin eingefuhrten Einschnittes in das Polygoninnere zu M_1. Ebenso bestimmen Π und Π_2 ein Polygon, dessen Innerem M_2 angehort.

Ergänzung. Wenn aus dem Polygon n zusammenhangende Mengen entfernt sind, so kann man das Polygon durch $n-1$ Querschnitte in n Teilpolygone zerlegen, deren jedes genau eine der n Mengen enthalt. Man beweist dies, indem man etwa erst $n-1$ der n Mengen zu einer verbindet und dann Satz VIII verwendet. Mit dem Polygon, das dann die $n-1$ verbundenen Mengen enthalt, verfährt man aufs neue ebenso.

4. Verallgemeinerungen. Die am Ende des vorigen Paragraphen und die eben jetzt bewiesenen Sätze sind einer weitgehenden Verallgemeinerung fahig. Man kann namlich als Grenze die in gewissem Sinne allgemeinste stetige Kurve, die sogenannte Jordankurve, heranziehen. Unter einem *Jordanschen oder einem einfachen stetigen Kurvenbogen* versteht man den Kurvenbogen $z = z(t)$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$, wenn $z(t)$ stetig ist und wenn nur für $t_1 = t_2 : z(t_1) = z(t_2)$ sein kann. Das ist also ein Kurvenbogen, der jeden seiner Punkte nur einmal passiert. Ein aus solchen Kurvenbogen als Seiten aufgebautes doppelpunktfreies Polygon — keine zwei Seiten sollen sich also schneiden — heißt eine *Jordankurve* oder *eine einfach geschlossene stetige Kurve*. Man kann dieselbe hiernach offenbar auch als das umkehrbar eindeutige und stetige Bild einer Kreisperipherie erklaren. Alle bisher fur Polygone und Polygonzuge bewiesenen Satze gelten auch für Jordankurven. Insbesondere gilt also der sogenannte *Jordansche Kurvensatz*:

Satz IX. *Eine jede geschlossene Jordankurve zerlegt die Ebene in genau zwei Gebiete.*

Auf den Beweis dieses Satzes, den der französische Mathematiker C. Jordan zuerst versuchte, wollen wir hier nicht mehr eingehen. In der Literatur sind zahlreiche Beweise derselben gegeben worden. Ich nenne nur den neuesten und wie mir scheint, besonders leicht verständlichen, den E. Schmidt in den Sitzungsberichten der preußischen Akademie der Wissenschaften 1913, S. 318 bis 329 gegeben hat.

Wenn wir gelegentlich von diesem Satze Gebrauch machen, so wird es kaum weiter storen, daß wir hier den Beweis unterdrucken; denn immer wird es

genügen, wenn der Leser dabei an die einfachsten ihm geläufigen Kurven denkt. Es ist nur begrifflich bequemer, statt dessen von Jordankurven zu reden, denn es würde schwer halten, die eben genannten einfachen Kurven begrifflich zu charakterisieren.

5. Polygonapproximationen. Ich schließe nun einen Satz an, der zwar aus dem Rahmen der eben besprochenen etwas herausfällt, der uns aber auch bald gute Dienste leisten wird.

Satz X. *Es sei eine Folge von einfach zusammenhangenden Bereichen* B_1, $B_2 \ldots$ *gegeben, derart, daß jeder Bereich alle Bereiche mit kleinerer Nummer umfaßt. Die Menge derjenigen Punkte, welche mindestens einem dieser Bereiche angehören, bildet dann selbst einen einfach zusammenhängenden Bereich* B, *den wir als Grenzbereich der Bereiche* B_n *auffassen können.*

Wenn nämlich ein Punkt einem der Bereiche angehört, so besitzt er eine gewisse Umgebung, die gleich ihm allen folgenden Bereichen angehört. Ebenso gehört jede Verbindungslinie zweier solcher Punkte auch allen folgenden Bereichen an. Die zu untersuchende Menge ist also ein Bereich. Wenn aber die Menge seiner Randpunkte nicht zusammenhinge, sondern mehrere Kontinua am Rande beteiligt wären, so könnte man nach Satz III ein im Bereich enthaltenes Polygon konstruieren, welches eines der Randkontinua von den übrigen trennt. Von einer gewissen Nummer an muß nun dies Polygon vollständig den Bereichen B_n angehören. Denn wenn es für jede Nummer n auf dem Polygon einen Punkt P_n gäbe, der nicht dem Bereiche dieser Nummer angehörte, so könnte ein Häufungspunkt dieser Punkte P_n auch keinem der Bereiche B_n, also auch nicht dem Bereiche B angehören. Wenn aber nun etwa das Polygon dem Bereich B_k angehört, so müßte es nach seiner Konstruktion sowohl in seinem Inneren als in seinem Äußeren Punkte besitzen, die nicht zu B_k gehören[1]), also auch Randpunkte von B_k. Dann wäre aber B_k nicht einfach zusammenhangend.

Satz XI. *Jeder einfach zusammenhängende Bereich* B *kann im Sinne von Satz X als Grenze von Polygonen aufgefaßt werden.*

Zum Beweise[2]) betrachte ich die abgeschlossene Menge derjenigen Bereichpunkte, deren Abstand vom Bereichrand $\frac{1}{10^n}$ übertrifft. Ich konstruiere nach Satz IV ein Polygon, das diese Menge vom Rande trennt. Dies Polygon sei B_n. Dann ist $B = \lim\limits_{n \to \infty} B_n$.

Satz XII. *Jeder Bereich ist Grenzbereich polygonaler Bereiche.*

1) Denn sonst gehörte das Polygoninnere oder das Polygonaußere ganz zu B_k, also auch ganz zu B im Gegensatz zu der Definition des Polygones

2) Der Einheitlichkeit wegen mögen die dabei vorkommenden Abstände im stereographischen Kugelbild des Bereiches gemessen werden.

Der Beweis ergibt sich nach Satz III auf Grund der oben angestellten Überlegungen. Insbesondere gilt noch

Satz XIII. *Jeder zweifach zusammenhangende Bereich kann als Grenze von Polygonringen aufgefaßt werden.* Der Beweis verlauft unter Verwendung von Satz V genau wie bei Satz XI.

Alles in diesem Paragraphen Besprochene ist wohl anschaulich leicht einleuchtend. Eine nähere Analyse zeigt aber, daß diese Anschaulichkeit ein Trugbild ist, denn nicht der allgemeine Satz über die betreffenden Begriffe ist es, der unserer Anschauung einleuchtet, sondern es sind gewisse einfache Spezialfälle, an welchen unsere Anschauung orientiert ist. Bei solchen Verallgemeinerungen anschaulich einleuchtender Satze auf begriffliche Wahrheiten kann man aber nicht vorsichtig genug sein. Daher haben wir auch hier nicht die Muhe gescheut, unseren weiteren Uberlegungen eine solide Grundlage zu geben.

§ 9. Nochmals der Logarithmus und seine Abbildungen.

Wir wollen zunachst einen Teil der Ergebnisse des vorigen Paragraphen verwenden, um einige Satze uber die logarithmische Abbildung, die auch wieder der unmittelbaren Anschauung recht nahe liegen, wirklich zu beweisen. Es handelt sich im wesentlichen um folgenden Satz: *Die endlichen Werte, welche $w = \log z$ in einem den Punkt $z = 0$ enthaltenden einfach zusammenhangenden Bereich annimmt, erfüllen selbst einen einfach zusammenhängenden Bereich, den Bildbereich jenes Bereiches.*

Zunachst ein paar Worte zur Erläuterung. Daß ein den Nullpunkt nicht enthaltender endlicher einfach zusammenhangender Bereich wieder in einen schlichten einfach zusammenhängenden Bereich ubergeht, leuchtet nach allem, was wir uber den Logarithmus wissen, ohne weiteres ein. Er vermittelt ja nach S. 78 eine gebietstreue schlichte Abbildung und fuhrt den Rand des abzubildenden Bereiches in den Rand des Bildbereiches uber. Bei dem jetzt zu beweisenden Satze aber liegen die Verhaltnisse etwas anders. Denn der abzubildende Bereich ist ja zweifach zusammenhangend. Auch im Nullpunkt wird ja der Logarithmus singular. Trotzdem wird der Bildbereich wieder einfach zusammenhängend. Von einfachen Fallen her ist die Richtigkeit des Satzes dem Leser auch schon geläufig. So ist ja z. B. das Bild des Kreises $0 < |z| < r$ die Halbebene $\Re(w) < \log r$. Jetzt gilt es, den allgemeinen Fall zu erledigen.

Zunachst mache ich einmal die einschränkende Annahme, daß der Bereich von einem einfachen Polygon begrenzt ist. Dies geschieht in der Absicht, hernach einen allgemeineren Bereich als Grenze solcher Polygone im Sinne von Satz X (S. 91) aufzufassen. Dieser Polygonzug geht bei der Abbildung in eine Jordankurve über, welche zwei um $2\pi i$ unterschiedene Punkte mit-

einander verbindet. Verbinde ich weiter den Punkt $z = 0$ mit dem Polygon durch einen längs der positiven reellen Achse geführten Querschnitt, so wird aus dem Polygon ein einfach zusammenhangender Bereich, der also durch $w = \log z$ auf einen einfach zusammenhängenden schlichten Bereich der w-Ebene abgebildet wird. Derselbe ist von dem eben genannten Jordanbogen und zwei Parallelen zur reellen Achse begrenzt, die um $2\pi i$ gegeneinander verschoben sind, also auf einen abgeschnittenen Streifen. Eine solche Abbildung vermittelt ein jeder Zweig des Logarithmus. Denn alle sind sie ja in dem Polygon, das wir eben abbildeten, eindeutig und unterscheiden sich voneinander um Vielfache von $2\pi i$. Die durch die verschiedenen Zweige erhaltenen Bildstreifen lagern sich also glatt zu einem einfach zusammenhangenden Bereich aneinander, welcher dann von den Bildern des Polygonrandes begrenzt wird. Diese Jordansche Randkurve besteht aus lauter kongruenten, um Vielfache von $2\pi i$ gegeneinander verschobenen Bogen und erstreckt sich also ins Unendliche. Diese Bemerkung wird uns spater nutzlich sein.

Wenn wir nun den ursprunglich gegebenen Bereich als Grenze von Polygonen auffassen, so wird er selbst auf den Grenzbereich dieser Polygonbilder abgebildet. Also auch sein Bildbereich wird einfach zusammenhangend.

Wir betrachten nun weiter *einen zweifach zusammenhangenden Bereich. Der Punkt $z = 0$ soll ihm nicht angehören. Wenn der Bereich den Punkt $z = 0$ umringt,* d. h. wenn es in ihm ein einfaches Polygon gibt, das diesen Punkt umschließt, so wird *auch dieser Bereich auf einen einfach zusammenhangenden Bereich abgebildet.*

Denn wieder konnen wir den Bereich als Grenze von Polygonringen auffassen und brauchen den Satz also nur fur Polygonringe zu beweisen. Dann ergibt er sich sofort aus dem vorigen Denn der vom außeren Polygon begrenzte $z = 0$ enthaltende Bereich hat dann einen einfach zusammenhangenden Bildbereich. Von diesem ist das Bild des inneren Polygones wegzulassen. Der ubrigbleibende Bereich ist einfach zusammenhangend, denn die Bilder der Polygonperipherien haben den Punkt $z = \infty$ gemeinsam und bilden also eine zusammenhangende Menge.

§ 10. Der Tangens.

1. Abbildung der Geraden $x =$ const., $y =$ const. auf zwei Kreisbüschel. Die durch $\sin z$, $\cos z$ vermittelten Abbildungen werden wir erst spater naher untersuchen konnen, weil wir dazu einige Kenntnisse uber die Funktion $z + \frac{1}{z}$ notig haben. Wohl aber konnen wir jetzt schon $\operatorname{tang} z$ ubersehen. Der Tangens wird, wie im Reellen, als Quotient $\frac{\sin z}{\cos z}$ erklart. Führt man

die Exponentialfunktion ein, so gewinnt man die Darstellung

$$\operatorname{tang} z = \frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}} \quad \text{oder auch} \quad \operatorname{tang} z = \frac{1}{i}\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}.$$

Aus dieser letzten Gestalt kann man bequem den Verlauf der Abbildung entnehmen. Wir wollen zunächst die Abbildung des durch die Geraden $x = 0$ und $x = \pi$ begrenzten Streifens betrachten. Der Tangens bleibt ja ungeändert, wenn man sein Argument um Vielfache von π ändert. Daher lassen wir diese Beschrankung auf einen Streifen der Breite π zunächst eintreten. Wir setzen $2iz = \zeta$ und bilden damit den Streifen auf den von den Geraden $\tau = 0$, $\tau = 2\pi$ $(\zeta = \sigma + i\tau)$ begrenzten Streifen ab. Alsdann setzen wir $e^{\zeta} = t$ und erhalten so die Abbildung des Streifens auf die volle t-Ebene. Dabei geht die Grenze des Streifens in die positive reelle Achse uber. Endlich haben wir

$$w = \frac{1}{i}\frac{t-1}{t+1}.$$

Das ist eine lineare Funktion. Durch sie wird die volle t-Ebene derart auf die volle w-Ebene abgebildet, daß dabei die positive reelle Achse in das endliche geradlinige Verbindungsstuck von $-i$ und $+i$ ubergeht. Das ist also der Bildbereich unseres Streifens der Breite π in der z-Ebene, welcher aus diesem durch Abbildung vermoge der Funktion $w = \operatorname{tang} z$ erhalten wird. Die Parallelen zur imaginaren z-Achse gehen dabei in die Kreise durch $+i$ und $-i$ uber, wahrend die Parallelen zur reellen Achse zum dazu senkrechten Kreisbuschel fuhren. Naheres mag man dem Anblick der Figuren 37a und 37b entnehmen.

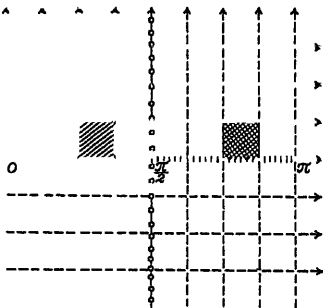



Fig 37a

2. Die Riemannsche Fläche. Zerlegt man nun die z-Ebene in lauter zu dem ersten parallele Streifen der Breite π, so wird ein jeder solcher Streifen in ein gleiches Exemplar der w-Ebene abgebildet, derart, daß z-Punkte, die sich um Vielfache von π unterscheiden, denselben w-Wert liefern. Nun vereinigen wir die verschiedenen Exemplare der w-Ebene zu einer Riemannschen Flache, indem wir sie so aneinanderheften, wie die Streifen der z-Ebene aneinanderhangen. Sie sind also langs der Bilder der Linien, welche die Streifen voneinander trennen, aneinanderzuheften. Das ist aber jedesmal die Verbindungslinie von $-i$ nach $+i$. Denken wir uns alle w-Ebenen langs dieser Linie aufgeschnitten, so konnen wir da ein rechtes und ein linkes Ufer unterscheiden. Dann ist jedes Blatt in seinem rechten Ufer an das linke Ufer des vorauf-

gehenden Blattes anzuheften. Man erhält so eine Riemannsche Fläche, unendlich vielblattrig, wie die des Logarithmus, mit Verzweigungspunkten unendlicher Ordnung bei $\pm i$, während ja die der Logarithmusfläche bei 0, ∞ lagen. Daß die Beziehung zum Logarithmus eine noch engere ist, als man hiernach schon vermuten kann, werden wir bald sehen. Zunachst aber mussen wir die eben angegebenen Resultate noch etwas naher begrunden. Was ist ein voraufgehendes Blatt, und warum mussen wir stets ein rechtes Ufer an ein linkes anheften?

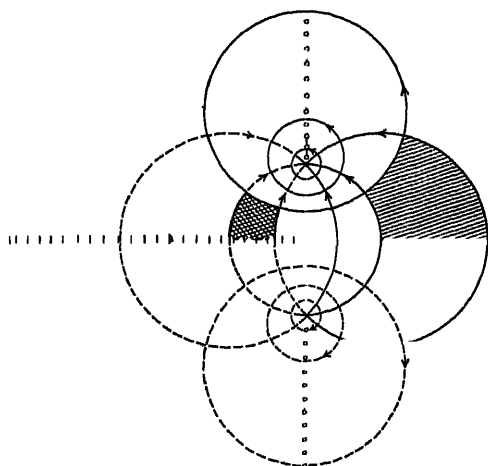



Fig 37 b.

Wir wollen sagen, ein Blatt gehe einem anderen voraus, wenn sein zugehoriger Streifen kleinere Realteile enthalt als der zum folgenden Blatt gehorige Streifen. Wir mussen nun zusehen, in welcher Weise die rein imaginare Achse der z-Ebene auf die Verbindungslinie $\pm i$ abgebildet wird. Die Pfeile in den beiden Figuren bringen das des naheren zur Darstellung. Zur Begrundung sei nur bemerkt, daß doch $\operatorname{tang} 0 = 0$ ist, und daß $\operatorname{tang} z$ fur $0 \leqq z < \frac{\pi}{2}$ mit wachsendem z zunimmt. Da nun aber die positive imaginare z-Achse links von der positiven reellen Achse liegt, so muß ihr Bild links von der positiven reellen w-Achse sich befinden. Ruckt man nun von der imaginaren Achse aus nach der rechten Seite der von unten nach oben gehenden Durchlaufsrichtung in den Streifen hinein, so muß die Bildbewegung auch nach der rechten Seite der eben angegebenen Durchlaufungsrichtung erfolgen. Geht man aber nach links in den vorausgehenden Nachbarstreifen, so muß das ihm entsprechende vorausgehende Blatt zur Linken der Richtung $-i \rightarrow +i$ liegen. Daher sind die Blatter so aneinanderzuheften, wie oben angegeben wurde.

3. Gebietstreue. Aus dem Verlauf der Abbildung entnimmt man wieder, daß jedes genugend kleine, von Koordinatenlinien begrenzte Quadrat der z-Ebene in ein Kreisbogenviereck der w-Ebene ubergeht (vgl. Fig. 37). Daher ist die Abbildung durchweg gebietstreu. Eine Ausnahme machen nicht einmal die bei den Nullstellen von $\cos z$ gelegenen Pole. Pole sind das deshalb, weil $\frac{\cos z}{\sin z}$ dort stetig und analytisch ist (vgl. S. 49).

4. Der Arcustangens. In jedem schlichten Bereich, der die Verzweigungspunkte $\pm i$ der Fläche nicht enthält, zerfällt die Umkehrungsfunktion $z = \operatorname{arctg} w$ in unendlich viele Zweige, deren jeder in dem Bereiche eindeutig erklärt ist, und die sich voneinander um Vielfache von π unterscheiden, entsprechend dem Blatt der Riemannschen Fläche, in dem man den Bereich gelegen denkt. Daher rechnet man nun, wie schon mehrfach geschehen, nach, daß

$$\frac{d}{dw} \operatorname{arctg} w = \frac{1}{1+w^2}$$

wird. $\operatorname{arctg} w$ ist also in jedem solchen Bereich analytisch.

Umläuft w im positiven Sinne den Punkt $w = i$ einmal, so nimmt $\operatorname{arctg} w$ um π zu. Umläuft es aber $-i$ einmal im positiven Sinne, so nimmt $\operatorname{arctg} w$ um π ab.

Wir stellen nun noch den $\operatorname{arctg} w$ durch den $\log w$ dar. Zu dem Zwecke haben wir nur die Gleichung

$$w = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$$

nach z aufzulösen. Man findet

$$z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iw}{1-iw}.$$

Tatsächlich führt ja nun die lineare Funktion

$$\frac{1+iw}{1-iw}$$

die Riemannsche Fläche des arcustangens in eine bei 0 und ∞ verzweigte Fläche über, die dann durch den Logarithmus schlicht abgebildet wird.

§ 11. $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

1. Abbildung der Kurven $r = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$ auf konfokale Ellipsen und Hyperbeln. Um die durch diese Funktion vermittelte Abbildung zu übersehen, bemerken wir zunächst, daß sie überall da winkeltreu ist, wo die Ableitung nicht verschwindet, aber nur für $z = \pm 1$ verschwindet w'. Dort erhält w die Werte $w = \pm 1$. Diese werden für den Bildbereich der z-Ebene eine besondere Rolle spielen.

Ich setze nun $$z = re^{i\varphi},\ w = u + iv.$$

Dann wird
$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \varphi$$

$$v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \varphi.$$

Daher gehen die Kreise $r = c$ mit $c \neq 1$ in die Ellipsen

$$\frac{u^2}{\left(c + \frac{1}{c}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(c - \frac{1}{c}\right)^2} = \frac{1}{4}$$

und die Geraden $\varphi = c$, für die $\cos c \cdot \sin c \neq 0$ ist, in die Hyperbeln

$$\frac{u^2}{\cos^2 c} - \frac{v^2}{\sin^2 c} = 1$$

über. Die Brennpunkte dieser Kegelschnitte liegen stets bei ± 1. Wegen der Winkeltreue der Abbildung findet man daher die bekannte Tatsache bestätigt, daß die Ellipsen auf den konfokalen Hyperbeln, d. h. den Hyperbeln gleicher Brennpunkte, senkrecht stehen. Der Einheitskreis geht in das Stück der reellen Achse von -1 bis $+1$ über. Das sieht man, indem man $z = e^{i\varphi}$ in $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ einträgt. Dann wird $w = \cos\varphi$. Man sieht so, daß zur reellen Achse spiegelbildliche Punkte des Einheitskreises denselben Punkt der reellen Achse liefern. Die Gerade $\varphi = 0$ liefert $v = 0$ mit $|u| \geqq 1$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$ liefert $u = 0$.

2. Die Riemannsche Fläche. Weiter sieht man, daß Kreise von reziproken Radien r und $\frac{1}{r}$ dieselbe Ellipse liefern. Wir deuten daher die Abbildung in zwei Exemplaren der w-Ebene. In der einen tragen wir die Bilder der Punkte des Einheitskreisinneren ein, auf die andere bilden wir das Äußere ab. Lassen wir nun einen Kreis $|z| = r$ etwa das Innere des Einheitskreises überstreichen, so überstreicht die Bildellipse genau einmal die w-Ebene. Daher wird sowohl das Innere wie das Äußere auf ein schlichtes Exemplar der w-Ebene abgebildet. Diese beiden haben wir nun noch zu vereinigen, so wie Inneres und Äußeres des Einheitskreises aneinanderhängen. Das läuft daraus hinaus, daß wir längs der Linie $-1 \to +1$ die beiden w-Ebenen kreuzweise aneinanderheften, so etwa wie längs der positiven reellen Achse die beiden Blätter der Riemannschen Fläche von $\sqrt{w}$ zusammenhängen. Man sieht nämlich leicht ein, daß z-Werte, die am Einheitskreis invers sind, konjugiert imaginären w-Werten entsprechen. Denn es ist ja $w\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \overline{w(z)}$. Denkt man sich daher die beiden Blätter von -1 nach $+1$ aufgeschnitten, so ist immer ein unteres mit einem oberen Ufer des anderen Blattes zu vereinigen. Man kann dies auch daraus folgern, daß ja ein von Koordinatenlinien begrenztes Kreisbogenviereck, welches einen Bogen des Kreises $|z| = 1$ enthalt, bei der Abbildung in ein von Kegelschnittbogen begrenztes Viereck übergehen muß, welches einen Teil des Stückes der reellen Achse von -1 bis $+1$ enthält. Überhaupt geht ja ein solches Kreisbogenviereck, welches ± 1 nicht enthält, stets in ein schlichtes Viereck der w-Ebene über, so daß wieder die Abbildung gebietstreu ist. Dies ist auch bei

den Punkten $z = \pm 1$ der Fall. Die schlichte Umgebung eines solches Punktes geht in die zweifach gewundene Umgebung von $w = \pm 1$ uber. Um das zu sehen, haben wir im Sinne der Definition, die wir S. 70 fur eine zweiblättrige Umgebung gaben, zu zeigen, daß man die Gesamtheit der Punkte unserer Riemannschen Fläche, welche in der Nahe von ± 1 liegen, durch die Funktion $t = \sqrt{w - 1}$ bzw. $\sqrt{w + 1}$ auf die schlichte Umgebung von $t = 0$ abbilden kann. Der Augenschein laßt ja schon vermuten, daß es so ist. Den allgemeinen Grund werden wir erst spater kennen lernen. Vorlaufig mussen wir eine besondere Überlegung anstellen. Wir bemerken, daß

$$t = \sqrt{w - 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{z - 1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}}\right).$$

Wir erhalten so je nach dem Vorzeichen der Wurzel zwei Abbildungen. Wir entscheiden uns fur diejenige, fur die $\sqrt{1} = +1$ ist. Nun leistet jedenfalls $\zeta = \sqrt{z}$ eine schlichte Abbildung der Umgebung von $z = 1$ auf die schlichte Umgebung von $\zeta = 1$. Dann ist also noch die Abbildung anzusehen, welche $t = \zeta - \frac{1}{\zeta}$ von der Umgebung von $\zeta = 1$ vermittelt. Ich schreibe

$$t = \frac{1}{i} \left(i\zeta + \frac{1}{i\zeta}\right)$$

und setze $i\zeta = \tau$; dann geht die schlichte Umgebung von $\zeta = 1$ in die schlichte Umgebung von $\tau = i$ uber. Und diese wird, wie schon in den vorigen Betrachtungen liegt, durch

$$t = \frac{1}{i} \left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)$$

schlicht abgebildet. Fassen wir zusammen. Die Funktion $t = \sqrt{w - 1}$ bildet die Gesamtheit der Punkte, welche auf der Riemannschen Flache in der Nahe von $+1$ liegen, auf die schlichte Umgebung von $t = 0$ ab. Denn diese Punkte der Flache sind genau die Bildpunkte der Umgebung von $z = 1$. Und zu diesen gingen wir uber, wenn wir in $t = \sqrt{w - 1}$ das z einfuhrten, und diese Umgebung haben wir schlicht weiter abgebildet. Genau ebenso schließt man bei $w = -1$.

3. Bemerkung. In die Abbildung $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ kann man auch Einblick gewinnen, wenn man schreibt:

$$w = \frac{1 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}{1 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}.$$

4. Schlichte Abbildungen der Riemannschen Fläche. Auf der zweiblättrigen Riemannschen Flache, welche, wie wir sahen, bei $w = +1$ und bei $w = -1$ verzweigt ist, sind mancherlei Funktionen eindeutig erklart. Das gilt

zunächst für diejenige Funktion von w, welche die Fläche umkehrbar eindeutig auf die schlichte z-Ebene abbildet. Sie ergibt sich natürlich durch Auflösung der Gleichung

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

oder, was dasselbe ist, von $z^2 - 2wz + 1 = 0$ nach w, so daß man also für diese Funktion die Darstellung

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1} \qquad \text{findet.}$$

So wie aber diese Funktion auf der Fläche eindeutig erklärt ist, so trifft dies auch für die Funktion

$$z - w = \sqrt{w^2 - 1}$$

zu. Daher nennt man die Fläche auch Riemannsche Fläche der Quadratwurzel

$$\sqrt{w^2 - 1}.$$

Mit $\sqrt{w^2 - 1}$ ist natürlich auch

$$t = \frac{\sqrt{w^2 - 1}}{w + 1} = \sqrt{\frac{w - 1}{w + 1}}$$

eindeutig auf der Fläche erklärt. Auch diese Funktion leistet eine Abbildung der Riemannschen Fläche auf eine schlichte Ebene. Denn man kann

$$t = \sqrt{\frac{w - 1}{w + 1}} = \frac{z - 1}{z + 1}$$

schreiben und ersieht daraus, daß sich

$$\sqrt{\frac{w - 1}{w + 1}}$$

linear durch $\qquad w + \sqrt{w^2 - 1}$

ausdrückt. Um also die Abbildung durch

$$t = \sqrt{\frac{w - 1}{w + 1}}$$

zu erhalten, kann man erst die Abbildung

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1}$$

vornehmen und alsdann die z-Ebene noch der linearen Abbildung

$$t = \frac{z - 1}{z + 1}$$

unterziehen, durch welche die schlichte z-Ebene in die schlichte volle t-Ebene übergeht.

5. Andere zweiblättrige Riemannsche Flächen mit zwei Verzweigungspunkten. Die hier besprochene zweiblättrige Fläche ist nur ein spezieller Fall der zweiblättrigen Flächen mit zwei beliebig gelegenen Verzweigungspunkten. Man kann irgend zwei derartige Flächen durch eine lineare Abbildung der w-Ebene ineinander überführen. Man muß diese Abbildung nur so wählen, daß dabei die Verzweigungsstellen der einen Ebene in die Verzweigungsstellen der anderen Ebene übergeführt werden. So wird z. B. durch die Abbildung

$$\zeta = \frac{w-1}{w+1}$$

unsere bei $w = \pm 1$ verzweigte Fläche in die in § 4 betrachtete Riemannsche Fläche von $\sqrt{\zeta}$ übergeführt. Denn die neue Fläche muß ja durch

$$t = \sqrt{\zeta} = \sqrt{\frac{w-1}{w+1}}$$

auf eine schlichte t-Ebene abgebildet werden.

Auf S. 257 werden wir erneut auf diese Dinge zu sprechen kommen.

§ 12. Die trigonometrischen Funktionen.

1. Die Abbildung. Wir wenden nun unsere Ergebnisse auf die trigonometrischen Funktionen an. Ich betrachte zunächst $w = \cos z$. z beschränke ich zunächst auf einen Streifen der Breite 2π parallel der imaginären Achse. Er sei etwa von den Geraden $x = 0$ und $x = 2\pi$ begrenzt. Durch die Abbildung $t = e^{iz}$ geht er in ein volles Exemplar der t-Ebene über. Die Begrenzungslinien bilden sich auf die positive reelle Achse ab. Nun ist weiter

$$w = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right).$$

Daher wird das volle Exemplar der t-Ebene nun auf die vorhin erhaltene zweiblättrige bei $w = \pm 1$ verzweigte Fläche abgebildet. Die positive reelle Achse der t-Ebene geht dabei in die Stücke der positiven reellen Achse von $+1$ nach ∞ in beiden Blättern über. Soweit sie im Inneren des Einheitskreises liegt, wird sie eben auf das eine, soweit sie im Äußeren liegt, auf das andere Blatt abgebildet.

Zerlegt man nun die z-Ebene in lauter parallele Streifen der Breite 2π, begrenzt von den Linien $x = 2h\pi$ $(h = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$, so wird jeder dieser Streifen auf ein solches zweiblättriges Exemplar abgebildet. Längs der angegebenen Linien sind dieselben zu vereinigen. So erhält man den Bildbereich der z-Ebene.

B e m e r k u n g : Dies Beispiel wird dem Leser schon zeigen, daß die Riemannschen Flächen, welche wir zunächst als anschauliches Mittel einführten, auch recht wenig anschaulich ausfallen können. Darin liegt auch eine Andeutung dafür, daß im Laufe der Zeit uns die Riemannschen Flächen mehr und mehr aus einem anschaulichen ein begriffliches Hilfsmittel werden. Dies mögen dem Leser auch schon die Betrachtungen zeigen, welche wir nun weiter anstellen.

Grenzen wir durch Parallele zu den Koordinatenachsen um einen Punkt der z-Ebene eine Umgebung ab, so wird diese durch unsere Abbildung auf ein Gebiet über der w-Ebene abgebildet. Dasselbe ist schlicht, wofern die Abbildung nicht auf die gewundene Umgebung von $w = \pm 1$ erfolgt. Das ist aber nur dann der Fall, wenn $e^{iz} = \pm 1$ ist, d. h. wenn z ein Vielfaches von π ist. Diese Stellen werden aber gerade auf die zweiblättrigen Windungspunkte abgebildet.

B e m e r k u n g . Schon mehrfach war jetzt ein merkwürdiger Parallelismus von Aufhören der Winkeltreue und Aufhören der Gebietstreue im schlichten Sinn zu merken. Das ist kein Zufall Wir werden bald allgemein sehen, daß die Umgebung eines Punktes nur dann nicht auf die schlichte Umgebung des Bildpunktes abgebildet wird, wenn dort die Ableitung der Funktion verschwindet. Bei dieser Formulierung haben wir natürlich die regulären Stellen der Abbildungsfunktion im Auge.

2. Der Arcuscosinus. Aus unserem Nachweis der Gebietstreue folgt nun, daß in jedem Bereich der w-Ebene, welcher keinen Windungspunkt enthält, die Umkehrungsfunktion $z = \arccos w$ in unendlichviele jeweils eindeutig erklärte Zweige zerfällt, deren jeder analytisch ist.

Die verschiedenen Zweige zerfallen in zwei Klassen. In jeder einzelnen Klasse sind die Werte des $\arccos w$ um Vielfache von 2π unterschieden. Die entsprechenden Bereiche gehören also verschiedenen Exemplaren der zweiblättrigen Fläche an. In übereinanderliegenden Punkten desselben zweiblättrigen Exemplars nimmt der $\arccos w$ weiter durchs Vorzeichen unterschiedene Werte an. Denn auch bei Vorzeichenwechsel von z bleibt $\cos z$ ungeändert. Daher können die arccos-Werte der beiden Klassen so in Paare eingeteilt werden, daß die Werte eines jeden einzelnen Paares sich gerade durchs Vorzeichen unterscheiden.

Um noch die Differenzierbarkeit einzusehen, wählen wir einen bestimmten der Zweige aus. Dann wird wieder nach einer schon mehrfach verwendeten Schlußweise

$$\frac{d \arccos w}{dw} = \frac{-1}{\sin z} = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}.$$

Ganz ahnliche Überlegungen wie die eben angestellten lassen auch in dem arcussinus eine unendlichvieldeutige analytische Funktion erkennen. Das entnimmt man ja auch daraus, daß

$$\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = w,$$

daß also auch
$$\arcsin w + \arccos w = \frac{\pi}{2}.$$

Für die Ableitung ergibt sich

$$\frac{d \arcsin w}{dw} = \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}.$$

Man hatte auch von der Darstellung des Arcussinus durch den Logarithmus (vgl. S. 242) ausgehen und darauf die Darlegungen aufbauen konnen. Einige Andeutungen dazu gebe ich spater (S. 242). Die nahere Durchfuhrung sei dem Leser überlassen.

Funfter Abschnitt.

Integralrechnung im komplexen Gebiet.

§ 1. Unbestimmte Integrale.

Aufgabe der Integralrechnung ist es, auch im komplexen Gebiet, vor allem diejenigen Funktionen zu suchen, deren Ableitung einer gegebenen Funktion gleich ist. Jede Formel der Differentialrechnung liefert so unmittelbar eine Formel der Integralrechnung, und man erhalt so, wie im Reellen, einen guten Vorrat an Stammformeln.

Hat man weiter z. B. eine durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion $f(z) = \sum a_n z^n$ zu integrieren, so erkennt man ein Integral sofort in $\sum \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}$. Diese Reihe hat ja Koeffizienten von kleinerem Betrage als die gegebene. Sie konvergiert also jedenfalls uberall da, wo die erste absolute konvergiert, und kann dann gliedweise differenziert werden (S. 37). So findet man als ihre Ableitung die gegebene Funktion.

Ob die so gefundenen aber, von einer additiven Konstanten abgesehen, die einzigen Integrale sind, oder, anders ausgedrückt, ob, wie im Reellen, die Konstante die einzige analytische Funktion ist, deren Ableitung durchweg verschwindet, bleibt hier noch dahingestellt. Im Reellen erbringt man ja den Beweis auf Grund des Mittelwertsatzes. Der steht uns aber hier bisher nicht zur Verfügung.

Besondere Vorsicht ist geboten, wenn man beim Integrieren auf mehrdeutige Funktionen stößt. Daß $\int \frac{dz}{z} = \log z$ ist, sieht ja sehr schön aus. Aber die Schönheit hört sofort auf, wenn man Grenzen eintragen will. Welchen Wert des Logarithmus soll man unter $\int_1^z \frac{d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}$ verstehen? Auf derartige Fragen kann man mit solch naiven Methoden, wie sie bisher zur Verfügung stehen, keine Antwort geben. Wir müssen dazu unsere Untersuchungen auf viel breiterer Grundlage aufbauen.

§ 2. Rektifizierbare Kurven.

$x(t)$ und $y(t)$ seien zwei für $a \leqq t \leqq b$ stetige eindeutige Funktionen der reellen Variablen t. Wir deuten x, y in einer komplexen z-Ebene. In dieser Ebene erhalten wir durch die Funktion $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ ein Bild der Strecke $a \leqq t \leqq b$, das wir eine stetige Kurve nennen.[1]) $z = z(t)$ heißt ihre Gleichung. Dem Parameterwert $t = a$ möge ihr Anfangspunkt $z = A$, dem Parameterwert $t = b$ ihr Endpunkt B entsprechen. Wir wählen $n + 1$ Parameterwerte $t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$. Ihnen mögen die Kurvenpunkte $A = z_0, z_1 \ldots z_{n-1}, z_n = B$ entsprechen. Wir verbinden sie der Reihe nach durch geradlinige Kurvensehnen und erhalten so ein eingeschriebenes Polygon. Seine Länge ist

$$l_n = |\Delta z_1| + |\Delta z_2| + \cdots + |\Delta z_n|,$$

wenn wir $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ setzen.

Alle möglichen Zahlenwerte l_n, die so als Längen von eingeschriebenen Polygonen auftreten können, machen eine gewisse Zahlenmenge aus. Wenn diese *beschränkt* ist, d. h. wenn es feste Schranken M gibt, die alle l_n übertreffen, für die also stets $l_n < M$ gilt, *dann heißt die Kurve rektifizierbar.*

1) Auf eine Möglichkeit, die diese Begriffsbildung zuläßt, will ich besonders hinweisen Die durch $z = z(t)$ dargestellte stetige Kurve kann z B. eine doppelt durchlaufene Strecke sein. Während der Parameter von a bis c geht, durchläuft etwa $z(t)$ die Strecke voll in der einen Richtung, um sie wieder rückwärts zu durchmessen, während der Parameter von c bis b weiter wächst Auf den ersten Blick ist dies Vorkommen vielleicht manchem Leser unerwünscht und fremdartig Der aufmerksame Leser aber wird sich erinnern, daß solche Vorkommnisse auch schon in anderem Zusammenhang da waren. So bildet z B. $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ die Peripherie des Einheitskreises auf die doppelt durchlaufene Strecke $-1 \leqq w \leqq +1$ ab. Dem entspricht es, daß $\cos\varphi$ eben diese Strecke zweimal durchläuft, wenn φ von 0 bis 2π wächst. Angesichts solcher Beispiele, die beliebig vermehrt werden können, wäre es ganz verkehrt, in einem funktionentheoretischen Buch künstlich solche Vorkommnisse beiseite zu schieben

Die kleinste dieser Schranken, die sog. *obere Grenze* der l_n nenne ich *Länge der Kurve.*[1])

Einige Eigenschaften der rektifizierbaren Kurven ergeben sich unmittelbar aus dieser Definition.

1. *Der Kurvenbogen ist länger als jedes einbeschriebene Polygon* stets dann, wenn die Kurve kein Polygonzug ist. Nur in diesem Falle gibt es einbeschriebene Polygone gleicher Länge, namlich z. B. den Kurvenzug selbst.

2. *Jeder Teilbogen einer rektifizierbaren Kurve ist selbst rektifizierbar.* Denn unter den dem ganzen Bogen einbeschriebenen Polygonen kommen insbesondere solche vor, zu deren Eckpunkten die Endpunkte des Teilbogens gehoren. Diese Endpunkte bestimmen einen dem Teilbogen einbeschriebenen Teilzug des Sehnenpolygons. Die so erhaltenen samtlichen Sehnenpolygone des Teilzuges sind demnach kurzer als die Lange des ganzen Kurvenbogens. Also sind sie beschrankt und der Teilbogen ist somit rektifizierbar.

3. Ahnlich sieht man ein, daß *jede aus zwei rektifizierbaren Bogen zusammengesetzte Kurve selbst rektifizierbar* ist, und daß *ihre Lange gleich der Summe der Langen der Teilbogen* ist. Denn jedes der Gesamtkurve einbeschriebene Polygon ist hochstens so lang als die Summe der Langen zweier passender den Teilbogen einbeschriebenen Polygone. Man erhalt solche, indem man den Punkt, wo beide Bogen zusammenstoßen, wenn noch notig, als neuen Eckpunkt einfuhrt. Er liegt ja dann zwischen zwei aufeinanderfolgenden Polygonecken. Die Verbindungslinie dieser beiden ersetzt man durch die beiden Strecken nach dem neuen Eckpunkt und zerlegt das so entstandene neue langere Polygon mit Hilfe dieser Ecke in zwei den Teilbogen einbeschriebene Polygone. So sieht man also, daß alle Sehnenpolygone der ganzen Kurve nicht langer sind als die Summe der Langen der Teilbogen, aus welchen die Kurve besteht. Weiter aber ist diese Langensumme genau die Länge der Gesamtkurve, weil man ihr durch passend gewählte Sehnenpolygone offenbar beliebig nahe kommen kann.

4. Nun mussen wir endlich noch sehen, daß *unser* fur manchen Leser etwas sonderbarer *Langenbegriff* weiter nichts ist als eine *Verallgemeinerung des üblichen,* der auf die geläufige Integraldarstellung der Lange fuhrt. Bei der Herleitung dieser Darstellung setzt man z. B. voraus, daß die Kurve aus endlich vielen Bogen besteht, fur deren jeden $z(t)$ eine stetige Ableitung $z'(t)$ besitzt. Ich greife einen solchen Teilbogen heraus: $\alpha \leqq t \leqq \beta$ sei er. Fur jedes Sehnenpolygon dieses Bogens gilt

$$\sum|\Delta z_k| = \sum\left|\frac{\Delta z_k}{\Delta t_k}\right|\Delta t_k = \sum\left|\sqrt{\{x'(\tau_k)\}^2 + \{y'(\tau_k')\}^2}\right|\Delta t_k.$$

1) Der Leser mache sich den Sinn der Definition z B an dem Fall einer aus zwei geradlinigen Strecken bestehenden Kurve klar. Die obere Grenze ist hier zufallig ein echtes Maximum.

Dabei bedeuten τ_k und τ'_k im Sinne des Mittelwertsatzes die passenden Stellen aus dem Intervall $t_{k-1} \leqq t \leqq t_k$. Die Integralrechnung lehrt aber nun[1]), daß sich bei genügend dichter Wahl der t_k alle diese Summen beliebig wenig von dem Integral

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2}\, dt = \int_\alpha^\beta |z'(t)|\, dt$$

unterscheiden. Dies Integral, „der Grenzwert der Naherungssummen“ in dem in der Integralrechnung ublichen Sinn ist aber zugleich deren obere Grenze. Denn zu jeder Naherungssumme existieren beliebig viele noch großere (wofern die Kurve keine Gerade ist). Man nehme nur in den Naherungssummen die Minima der $z' \mid (\tau_k) \mid$ in den einzelnen Intervallen und konstruiere durch fortgesetztes Unterteilen der Intervalle neue solche Naherungssummen. Diese Summen wachsen, wie man in der Integralrechnung lernt, stets an. Nur bei geradliniger Kurve sind alle gleich. Da ist aber auch die Behauptung trivial. Sonst wachsen die Naherungssummen standig und streben dem Grenzwert zu. Dieser ist zugleich die obere Grenze derselben. Denn gabe es nur eine großere, so gabe es nach dem Gesagten unendlich viele noch großere. Dann ware das Integral noch nicht einmal der Grenzwert, zu dem sich alle hindrangen. Es gibt hiernach auch keine den Integralwert ubertreffenden Sehnenpolygonlangen und andererseits gibt es nach der Herleitung Sehnenpolygone, deren Lange dem Integralwert beliebig nahekommt.

5. Man kann einen beliebigen Punkt der Kurve herausgreifen und ihn zum Nullpunkte der Bogenlangenmessung machen. Diesem Punkte moge etwa der Parameterwert $t = \alpha$ entsprechen. Dann gehort zum Punkt t die Bogenlange

$$s = \int_\alpha^t |z'(\tau)|\, d\tau.$$

Jeder Punkt bekommt so einen bestimmten Bogenabstand von $z(\alpha)$ und jeder Bogenabstand kommt auch nur einmal vor, weil beim Fortschreiten langs der Kurve die Bogenlange wachst. Man kann daher die Koordinate z der Kurvenpunkte als eindeutige Funktion $f(s)$ der Bogenlange s auffassen. Sie ist gleichzeitig eine stetige Funktion von s. Denn wenn man um ein Bogenstück Δs auf der Kurve fortschreitet, so kann sich dabei die Lage des Kurvenpunktes in der z-Ebene auch nicht um mehr als Δs andern. Ist insbesondere $z(t)$ differenzierbar, so wird auch $f(s)$ differenzierbar.

Denn offenbar ist dann

$$s(t) = \int_\alpha^t |z'(\tau)|\, d\tau$$

1) Vgl. z. B. Bieberbach, Integralrechnung. 3. Aufl. Leipzig 1928 S. 54ff.

eine differenzierbare monotone Funktion. Daher ist auch ihre Umkehrungsfunktion

$$t(s)$$

monoton und differenzierbar. Nun ist aber auch

$$f(s) = z\,\{t(s)\}$$

differenzierbar. Bekanntlich ist weiter $|f'(s)| = 1$.

§ 3. Kurvenintegrale.

1. Definition. Wir gehen nun daran, den Begriff des bestimmten Integrales ins Komplexe zu ubertragen. Dazu fuhren wir zunächst das Kurvenintegral $\int\limits_a^b f(z)\,dz$ ein, dessen Wert außer von den Grenzen — zwei komplexen Zahlen a und b — auch noch von dem Integrationsweg $\mathfrak{C}$, einer rektifizierbaren, die Grenzen verbindenden Kurve, abhangt.[1]) Daß oft diese Abhangigkeit vom Weg nur scheinbar ist, das ist der Inhalt des Hauptsatzes der Funktionentheorie. Wir werden ihn in einem der nachsten Paragraphen ableiten.

Seien a und b also zwei Punkte, $z = z(s)$ eine stetige, rektifizierbare, sie verbindende Kurve und $f(z)$ eine eindeutige stetige Funktion des komplexen Argumentes z in einem die Kurve $\mathfrak{C}$ enthaltenden Bereiche B. Wir erklaren nun, was wir unter $\int\limits_a^b f(z)\,dz$ verstehen wollen. Die Kurve $\mathfrak{C}$ sei dabei auf ihre Bogenlange s als Parameter bezogen, so daß nach S. 105 ihre Koordinate z eine stetige Funktion von s ist. Wir fuhren nun wieder $n+1$ Teilpunkte ein: $z_0 = a, z_1, \cdots, z_n = b$ und bilden (wie im Reellen, wo die Kurve $\mathfrak{C}$ ein Stuck der reellen Achse ist) die Summe $s_n = f(\zeta_1)\Delta z_1 + \cdots + f(\zeta_n)\Delta z_n$. Dabei bedeutet ζ_k irgendeinen Punkt des Teilbogens z_{k-1} bis z_k. Wir zeigen nun, daß es eine Zahl S und eine Funktion $\sigma(\varepsilon)$ gibt, so daß $|S - s_n| < \varepsilon$ wird, sobald nur die Langen aller Teilbogen kleiner als $\sigma(\varepsilon)$ sind. Diese Zahl S bezeichnen wir dann mit $\int\limits_a^b f(z)\,dz$, erstreckt uber $\mathfrak{C}$.

Um den Beweis zu erbringen, wahle ich vor allem die Längen der Teilbogen so klein, daß auf jedem Bogen die Schwankung der Funktion $f(z)$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{2L}$ ausfällt. L ist die Lange der Kurve. Unter Schwankung wird das Maximum verstanden, das die Differenz $|f(Z_1) - f(Z_2)|$ fur zwei Punkte Z_1 und Z_2

1) Daher schreibt man auch haufig $\int\limits_{(\mathfrak{C})} f(z)dz$, indem man dabei unter $\mathfrak{C}$ einen von a nach b laufenden Kurvenbogen versteht.

eines Teilbogens annehmen kann. Wegen der Stetigkeit und der daraus folgenden gleichmäßigen Stetigkeit der Funktion $f(z)$ kann dies wie im Reellen stets erreicht werden. Überhaupt wird ja der Leser gleich merken, daß unser Beweis durchaus wie im reellen Gebiet verläuft[1]). Seien nun $\Delta^{(1)} z_k$ und $\Delta^{(2)} z_k$ die z-Differenzen zweier solcher Einteilungen der Kurven und seien $\Delta^{(3)} z_k$ die z-Differenzen derjenigen Teilung, die entsteht, wenn man die bei beiden auftretenden Teilpunkte alle auf einmal aufträgt. Die Teilungen selbst will ich mit $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$ bezeichnen. Es sei z. B.

$$\Delta^{(1)} z_\varkappa = \Delta^{(3)} z_\lambda + \Delta^{(3)} z_{\lambda+1} \cdots + \Delta^{(3)} z_\mu .$$

Dann wird $$f(\zeta_\varkappa^{(1)}) \Delta^{(1)} z_\varkappa = f(\zeta_\varkappa^{(1)}) \Delta^{(3)} z_\lambda + \cdots + f(\zeta_\varkappa^{(1)}) \Delta^{(3)} z_\mu .$$

Die entsprechende Teilsumme von $\Delta^{(3)}$ wird

$$f(\zeta_\lambda^{(3)}) \Delta_\lambda^{(3)} z_\lambda + \cdots + f(\zeta_\mu^{(3)}) \Delta^{(3)} z_\mu .$$

Die Differenz beider ist dem Betrage nach kleiner als

$$|\Delta^{(3)} z_\lambda| \, |f(\zeta_\varkappa^{(1)}) - f(\zeta_\lambda^{(3)})| + \cdots + |\Delta^{(3)} z_\mu| \, |f(\zeta_\varkappa^{(1)}) - f(\zeta_\mu^{(3)})| .$$

Nun ist aber $|f(\zeta_\varkappa^{(1)}) - f(\zeta_m^{(3)})| < \frac{\varepsilon}{2L}$ für $m = \lambda, \lambda + 1, \cdots \mu$,

weil ja sowohl die $\zeta_m^{(3)}$ wie $\zeta_\varkappa^{(1)}$ Punkte desselben Bogens der Teilung $\Delta^{(1)}$ sind, und weil auf jedem Bogen die Schwankung kleiner als $\frac{\varepsilon}{2L}$ ist. Also wird die Differenz kleiner als

$$\frac{\varepsilon}{2L} \{ |\Delta^{(3)} z_\lambda| + \cdots + |\Delta^{(3)} z_\mu| \} .$$

Führe ich nun diese Überlegung längs der ganzen Kurve aus, so wird der Unterschied der Näherungssumme $S^{(1)}$ und der Näherungssumme $S^{(2)}$ also $|S^{(1)} - S^{(2)}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ebenso wird $|S^{(2)} - S^{(3)}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Daher wird $|S^{(1)} - S^{(2)}| < \varepsilon$. Damit ist gezeigt, daß es eine Zahl S von den behaupteten Eigenschaften gibt.

2. Eigenschaften. Einige Eigenschaften des Integralbegriffes liegen unmittelbar auf der Hand. *Wenn eine Kurve aus zwei Teilbogen ab und bc besteht, so ist*

$$\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c . \quad \textit{Ferner ist} \quad \int_a^b = -\int_b^a .$$

Denn wenn man für beide Integrale mit den gleichen Teilpunkten Näherungssummen bildet, so sind diese bis aufs Vorzeichen einander gleich. Denn bei dem einen sind die $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, bei dem anderen aber gleich $z_{k-1} - z_k$

1) Vgl. z. B. Bieberbach, Integralrechnung. 3. Aufl. Leipzig 1928. S. 21 ff.

Das Intregal einer Summe ist gleich der Summe der Integrale der beiden Summanden. Das Integral der Null verschwindet. Das Integral $\int_a^b c \cdot dz$ *der Konstanten c ist stets gleich* $c(b-a)$. Denn stets ist

$$\Delta z_1 + \cdots + \Delta z_n = z_1 - a + z_2 - z_1 + \cdots + b - z_{n-1} = b - a.$$

Ferner ist für die Konstante a

$$\int a f(z)\, dz = a \int f(z)\, dz.$$

Wenn längs des ganzen Integrationsweges der Länge L der Integrand dem Betrage nach kleiner als M ist, so ist $\left|\int f(z)\, dz\right| < ML$. Das folgt unmittelbar daraus, daß diese Ungleichung für alle Näherungssummen gilt, die bei der Definition des bestimmten Integrales auftreten.

Die gleiche Überlegung ergibt das noch allgemeinere Resultat, daß

$$\int_a^b f(z)\, dz \leqq \int_0^L f(z)\; ds,$$

wenn man unter s die Bogenlänge der Kurve versteht. Denn für die einzelnen Glieder der Näherungssumme gilt

$$|f(\zeta_k)\Delta z_k| \leqq |f(\zeta_k)|\,\Delta s_k,$$

wo unter Δs_k die Länge der Teilbogen verstanden wird.

3. Integration einer Reihe. Eine Anwendung dieser Abschätzung wird beim Beweis der folgenden Aussage gemacht. *Das Integral der Summe einer gleichmäßig konvergenten Reihe stetiger Funktionen kann durch gliedweises Integrieren bestimmt werden.* Denn wenn die Reihe

$$s(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots$$

längs des Weges $\mathfrak{C}$ gleichmäßig konvergiert, so gibt es eine für $\varepsilon > 0$ erklärte Funktion $N(\varepsilon)$, so daß die Summe

$$s_n(z) = f_1(z) + \cdots + f_n(z)$$

der n ersten Glieder von der Reihensumme $s(z)$ um weniger als ε längs der Kurve abweicht, sobald nur $n > N(\varepsilon)$ ist. Schreibt man also

$$s(z) = s_n(z) + r_n(z),$$

so ist längs $\mathfrak{C}$ stets $|r_n(z)| < \varepsilon$. Ist nun noch L die Länge der Kurve, so hat man

$$\int_a^b \{s(z) - s_n(z)\}\, dz = \int_a^b \{r_n(z)\, dz < \varepsilon L$$

oder
$$\int_a^b s(z)\,dz - \int_a^b f_1(z)\,dz - \cdots - \int_a^b f_n(z)\,dz < \varepsilon L.$$

Daher ist in der Tat
$$\int_a^b s(z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b f_1(z)\,dz + \int_a^b f_2(z)\,dz + \cdots \int_a^b f_n(z)\,dz\right\}$$

oder
$$\int_a^b s(z)\,dz = \int_a^b f_1(z)\,dz + \int_a^b f_2(z)\,dz + \cdots.$$

Der bewiesene Satz kann auch so ausgesprochen werden: Wenn langs des Integrationsweges
$$\lim_{n\to\infty} s_n(z)$$
gleichmaßig gegen $s(z)$ konvergiert, so gilt
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(z)\,dz = \int_a^b \lim_{n\to\infty} s_n(z)\,dz = \int_a^b s(z)\,dz.$$

Zusatz. Wenn $\sum f_n(z)$ absolut und gleichmaßig konvergiert, so konvergiert auch $\sum\int_a^b f_n(z)\,dz$ absolut. Denn man hat $\left|\int_a^b f_n(z)\,dz\right| \leqq \int_0^L |f_n(z)|\,ds$, und nach dem eben bewiesenen Satz konvergiert $\sum\int_0^L |f_n(z)|\,ds$ gleichmaßig und stellt $\int_0^L ds \sum |f_n(z)|$ dar.

Erweiterung. Es moge gleichmaßig fur alle dem Integrationsweg angehorige z
$$\lim_{t\to\tau} f(z,t) = f(z)$$
gelten[1]), wobei $f(z,t)$ und $f(z)$ auf dem Integrationsweg stetig sein mogen. Dann gilt, wie man genau entsprechend beweist,
$$\lim_{t\to\tau}\int_a^b f(z,t)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz.$$

4. Approximation. Jetzt wollen wir noch zeigen, *daß man ein jedes über eine rektifizierbare Kurve erstrecktes Integral mit beliebiger Genauigkeit durch ein*

1) D. h. es soll für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon)$ geben, so daß für $|t - \tau| < \delta(\varepsilon)$ und beliebige z auf dem Integrationsweg
$$|f(z,t) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{ist}$$

über ein Polygon erstrecktes Integral approximieren kann, falls der Integrand in einem die Kurve enthaltenden Bereich stetig ist. Dazu verwenden wir natürlich die Polygone, die schon bei der Definition der Kurvenlänge Verwendung fanden. Wir müssen sie nur so wählen, daß sie genügend nahe bei der Kurve verlaufen. Ein wesentlicher Beweisgrund ist wieder die gleichmäßige Stetigkeit. Man kann nämlich zu jeder abgeschlossenen Teilmenge B' von B eine Zahl $r(\varepsilon)$ so bestimmen, daß in jedem Kreis vom Radius $r(\varepsilon)$, dessen Mittelpunkt zu B' gehört, die Schwankung der Funktion $f(z)$ kleiner als ε ist. Wenn wir als B' die Kurve wählen und wenn wir dann also alle Polygonseiten kürzer als den Durchmesser dieses Kreises annehmen, so ist das über eine solches Polygon erstreckte Integral der Funktion $f(z)$ von der Summe $f(z_1)\Delta z_1 + \cdots + f(z_n)\Delta z_n$ um weniger als εL verschieden. Denn die Länge des Polygones ist ja kleiner als die Länge L der krummen Kurve. In der Näherungssumme sind dabei $z_0, z_1, \cdots z_n$ die auf der Kurve gelegenen Ecken des Polygones. Die Summe ist daher auch eine Näherungssumme für das Kurvenintegral. Um aber zu wissen, daß sie auch von diesem um weniger als εL abweicht, müssen wir wissen, daß auch auf den zwischen den Teilpunkten z_k liegenden Kurvenbogen die Schwankung von $f(z)$ kleiner als ε ist. Dazu muß man lediglich die Kurvenbogen alle hinreichend kurz wählen. Denn beziehen wir die Kurve auf ihre Bogenlänge s als Parameter, so gibt es ja eine Funktion $\delta(\varepsilon)$, so daß auf jedem Teilbogen der Länge $\delta(\varepsilon)$ die Schwankung der Funktion $f(z)$ kleiner wird als ε. Tragen wir nämlich in $f(z)$ für z die Funktion $z(s)$ ein, so wird $f(z(s))$ eine stetige Funktion von s. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit folgt dann die Existenz der Funktion $\delta(\varepsilon)$. Man hat also nun die Teilpunkte auf der Kurve nicht nur so zu wählen, daß der Abstand zweier aufeinanderfolgender kleiner wird als $r(\varepsilon)$, sondern auch so, daß die zwischen zwei aufeinanderfolgenden liegenden Kurvenbogen kürzer als $\delta(\varepsilon)$ sind. Dann unterscheiden sich Kurvenintegral und Polygonintegral um weniger als $2\varepsilon L$ voneinander, d. h. ihre Differenz besitzt einen absoluten Betrag kleiner als $2\varepsilon L$.

Praktisch ist damit also die Berechnung von Integralen über rektifizierbare Kurven auf die Berechnung von Polygonintegralen, also von Integralen über (abteilungsweise) differenzierbare Kurven zurückgeführt.

§ 4. Die Substitutionsmethode bei Kurvenintegralen.

1. Erste Verwendung der Substitutionsmethode. Wir behandeln zuerst eine Methode, die es erlaubt, bei speziellen, nämlich bei stetig differenzierbaren Integrationswegen, die Berechnung der Kurvenintegrale auf die Berechnung gewöhnlicher reeller bestimmter Integrale zurückzuführen. *Sei nämlich*

$z = z(t)$ $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ eine stetige Parameterdarstellung der Kurve derart, daß $z(t)$ eine stetige Ableitung besitzt, dann ist

$$\int_a^b f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z)\,z'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \Re\,dt + i\int_\alpha^\beta \Im\,dt,$$

wenn wir unter $\Re$ und $\Im$ Real- und Imaginärteil von $f(z)\,z'(t)$ verstehen.

Da nämlich die Ableitungen als stetig vorausgesetzt sind, so gibt es, wie der Leser selber beweisen möge, eine Funktion $\delta(\varepsilon)$, so daß für $|\Delta t| < \delta(\varepsilon)$ die Differenz $\left|\frac{\Delta z}{\Delta t} - z'(t)\right| < \varepsilon$ wird, ganz einerlei, wie t zwischen α und β gewählt ist.

Sei dann $\int_a^b f(z)\,dz$ das zu untersuchende bestimmte Integral über $\mathfrak{C}$,

$$f(z_1)\,\Delta z_1 + \cdots + f(z_n)\,\Delta z_n$$

eine Näherungssumme.[1]) Dann können wir dieselbe so schreiben:

$$f(z_1)\frac{\Delta z_1}{\Delta t_1}\Delta t_1 + \cdots + f(z_n)\frac{\Delta z_n}{\Delta t_n}\Delta t_n.$$

Dies ist aber von $\quad f(z_1)\,z'(t_1)\,\Delta t_1 + \cdots + f(z_n)\,z'(t_n)\,\Delta t_n$

um weniger als $\varepsilon M \Delta$ verschieden, wenn wir mit M das Maximum von $|f(z)|$ bezeichnen und $\Delta = \beta - \alpha = \Delta t_1 + \cdots + \Delta t_n$ setzen. Gehen wir mit den Näherungssummen zur Grenze über, so ist

$$\left|\int_a^b f(z)\,dz - \int_\alpha^\beta f(z)\,z'(t)\,dt\right| < \varepsilon M \Delta.$$

Da aber ε beliebig gewählt werden kann, so ist

$$\int_a^b f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z)\,z'(t)\,dt.$$

Da aber nun das Integral einer Summe gleich der Summe der Integrale über die Summanden ist, so ist auch die zweite obige Schreibweise gerechtfertigt,

2. Beispiele. a) Potenzen. Es sei $\mathfrak{C}$ eine beliebige stetig differenzierbare Kurve, welche die beiden Punkte a und b verbindet. *Dann ist das Kurvenintegral*

$$\int_a^b z^n\,dz = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right),$$

1) Wir machen also hier von einem durch die Definition des bestimmten Integrales verbrieften Recht Gebrauch, indem wir die Werte ζ_k aus den einzelnen Kurvenbogen, für welche die $f(\zeta_k)$ zu bilden sind, stets am Bogenanfang wählen.

wenn n eine positive oder negative von -1 verschiedene ganze Zahl ist. Denn sei $z = z(t)$ $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ die Parameterdarstellung der Kurve, so wird

$$\int\limits_{a(\mathfrak{C})}^{b} z^n dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} z^n z'(t)\, dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{n+1} \frac{d}{dt} [z(t)]^{n+1} dt = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}).$$

Der Wert des Integrales ist also für die analytische Funktion z^n vom Integrationsweg unabhängig.

b) Der Logarithmus. Sei B ein Bereich, in dem ein Zweig des Logarithmus eindeutig erklärt sei. Dann wird

$$\int\limits_{a}^{b} \frac{dz}{z} = \log \frac{b}{a}$$

für jede im Bereich verlaufende Kurve $\mathfrak{C}$.

Die Überlegung gilt auch dann noch, wenn $\mathfrak{C}$ mit der Gleichung

$$z = z(t) \quad (\alpha \leqq t \leqq \beta)$$

eine die Punkte a und b verbindende Kurve ist, auf welcher $\log z$ als eindeutige Funktion des Parameters t erklärt ist. Auch dann wird

$$\int\limits_{a}^{b} \frac{dz}{z} = \log b - \log a.$$

Das Integral wird also dann stets dem Wertezuwachs gleich, welchen der Logarithmus bei Durchlaufung der betreffenden Kurve erfährt. Ist also insonderheit als Integrationsweg ein den Punkt $z = 0$ zentrisch oder exzentrisch umschließender Kreis gewählt, so ergibt sich

$$\oint_{\circlearrowleft} \frac{dz}{z} = 2\pi i \quad \text{und} \quad \oint_{\circlearrowright} \frac{dz}{z} = -2\pi i,$$

also $+2\pi i$ oder $-2\pi i$, je nachdem der Kreis den Punkt Null im positiven oder negativen Sinn umlauft. Ist der Integrationsweg insbesondere ein Kreis $|z| = r$, so sei $z_0 = re^{i\varphi_0}$ einer seiner Punkte. Dann kann das Integral auch so ausgerechnet werden, daß man $z = re^{i\varphi}$ als Parameterdarstellung des Kreises in das Integral einführt. Dann wird

$$\oint_{\circlearrowleft} \frac{dz}{z} = i \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

Der Wert ist also von der Wahl des Punktes z_0 unabhängig, und das gibt uns das Recht, hier wie bei allen auf einem geschlossenen Integrationsweg

eindeutigen Integranden von einem Integral uber eine geschlossene Kurve zu reden. In Wahrheit ist es auch eine ganz und gar nicht immer eintretende Erscheinung, daß der Wert von z_0 nicht abhängt. Hat man z. B. $\frac{\log z}{z}$ uber denselben Kreis zu integrieren, so findet man

$$\int_{z_0}^{z_0} \frac{\log z}{z}\, dz = i \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} (\log r + i\varphi)\, d\varphi = i 2\pi \log r - \frac{(\varphi_0 + 2\pi)^2 - \varphi_0^2}{2}$$
$$= 2\pi i \log r - 2\pi\varphi_0 - 2\pi^2$$
$$= 2\pi i \log z_0 - 2\pi^2,$$

ein Wert also, der ganz und gar nicht von z_0 unabhangig ist.

c) Potenzreihen. Sei $\mathfrak{P}(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ eine Potenzreihe, z_1 eine Stelle aus dem Inneren ihres Konvergenzkreises, so ist $\int_0^{z_1} \mathfrak{P}(z)\, dz = \sum_0^\infty \frac{a_n z_1^{n+1}}{n+1}$, wenn das Integral uber eine beliebige stetig differenzierbare Kurve erstreckt wird, die z_1 mit dem Koordinatenanfang verbindet und dem Inneren des Konvergenzkreises angehort. Schließen wir namlich die Stelle z_1 in einen Kreis ein, der außer Null auch noch den Integrationsweg enthalten moge, so ist nach S. 27 in diesem Kreise die Potenzreihe gleichmaßig konvergent, und daher kann nach S. 108 das Integral durch gliedweises Integrieren bestimmt werden. Das fuhrt aber gerade zu dem angegebenen Resultat.

Man findet also das Integral einer durch eine Potenzreihe dargestellten Funktion durch gliedweises Integrieren. Hier ist also tatsachlich in weitem Umfange schon das Integral als *vom Integrationsweg unabhangig* erkannt, und gleichzeitig zeigt sich hier bei den Potenzreihen und in den anderen Beispielen *unser Integrationsprozeß als Umkehrung des Differentiationsprozesses*. Berucksichtigt man noch die am Schluß des vorigen Paragraphen besprochene Approximation beliebiger Kurvenintegrale durch Polygonintegrale, so kann man sogar in allen in den Beispielen 1., 2. und 3. besprochenen Funktionen die volle Unabhangigkeit der Integrale vom Wege erkennen. Denn erstreckt man in diesen Beispielen das Integral statt uber eine differenzierbare Kurve uber eine aus endlichvielen differenzierbaren Stucken zusammengesetzte Kurve, so kommt offenbar dasselbe Resultat heraus, weil dann das Integral gleich der Summe der Integrale uber die Teilbogen ist. Die Werte an den Teilpunkten heben sich dann gerade heraus, weil sie einmal mit plus, einmal mit minus dastehen. Also namentlich haben auch in den Beispielen alle Polygonintegrale zwischen den gleichen Grenzen den gleichen Wert. Erstreckt man also das Integral uber eine beliebige

rektifizierbare Kurve zwischen denselben Grenzen, so kann sich dies Integral von dem gemeinsamen Wert der Polygonintegrale nicht unterscheiden, da man ja nach S. 110 fur jedes ε abschätzen kann, daß der Unterschied kleiner als ε sein muß.

d) Ableitungen. Wir betrachten das Integral einer Ableitung. Sei also $f'(z)$ die stetige Ableitung einer in einem Bereiche B *eindeutigen* Funktion $f(z)$. Dann ist $\int\limits_a^b f'(z)\,dz = f(b) - f(a)$, ganz einerlei, uber welche Kurve man das Integral erstrecken mag. Wir brauchen wieder nur uber stetig differenzierbare Kurven zu integrieren. Sei $z = z(t)$ $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ ihre Gleichung. Dann wird $\int\limits_a^b f'(z)\,dz = \int\limits_\alpha^\beta f'(z)z'(t)\,dt = \int\limits_\alpha^\beta \frac{df}{dt}\,dt = f(b) - f(a)$. Damit ist die Behauptung schon bewiesen. Ganz allgemein erkennen wir so in der *Integration die Umkehrung der Differentiation.*

e) Verschwindende Ableitung. Jetzt konnen wir auch beweisen, daß die *einzige Funktion, deren Ableitung verschwindet, die Konstante ist.* Denn eine jede mußte ja durch den Integrationsprozeß gewonnen werden konnen. Der fuhrt aber doch bei gegebenem Integranden stets nur zu einer Funktion hin. Ist also $f'(z) \equiv 0$, so wird $\int\limits_a^z f'(z_1)\,dz_1 = f(z) - f(a) = 0$, d. h. $f(z) \equiv f(a)$, d. h. $f(z)$ hat uberall denselben Wert, ist also konstant. Demnach ist auch *eine jede analytische Funktion bis auf eine additive Konstante durch ihre Ableitung vollig bestimmt.*

3. Zweiter Fall der Substitutionsmethode. Wir nehmen dazu an, daß der ganze Bereich B_z, in welchem der Integrationsweg $\mathfrak{C}_z$ liegt, durch eine darin samt ihrer Umkehrungsfunktion eindeutige analytische Funktion $z = \varphi(w)$ mit stetiger Ableitung umkehrbar eindeutig auf einen Bereich B_w abgebildet werde. Dabei werde aus dem Integrationsweg $\mathfrak{C}_z$ der Integrationsweg $\mathfrak{C}_w$[1]. Dann wird, wie wir beweisen wollen,

$$\int\limits_{\mathfrak{C}_z} f(z)\,dz = \int\limits_{\mathfrak{C}_w} f(\varphi(w))\,\varphi'(w)\,dw.$$

1) Jeder rektifizierbaren Kurve $\mathfrak{C}_w$ entspricht dabei eine rektifizierbare $\mathfrak{C}_z$. Denn es ist

$$z_{\varkappa+1} - z_\varkappa = \varphi(w_{\varkappa+1}) - \varphi(w_\varkappa) = \int\limits_{w_\varkappa}^{w_{\varkappa+1}} \varphi'(w)\,dw.$$

Also $$|z_{\varkappa+1} - z_\varkappa| \leqq M\,|w_{\varkappa+1} - w_\varkappa|,$$

wenn man mit M das Maximum von $\varphi'(w)$ langs $\mathfrak{C}_w$ versteht. Sind also die $\Sigma\,|w_{\varkappa+1} - w_\varkappa|$ beschrankt, so sind auch die $\Sigma\,|z_{\varkappa+1} - z_\varkappa|$ beschrankt.

Dabei sind $\mathfrak{C}_z$ und $\mathfrak{C}_w$ in Richtungen zu durchlaufen, welche einander bei der Abbildung entsprechen. Das läßt sich durch einfache Anwendung der zu Beginn des Paragraphen dargelegten Dinge ohne weiteres erkennen[1]). Denn wenn $w = w(t)$ eine Parameterstellung von $\mathfrak{C}_w$ ist, so wird $z = \varphi(w(t))$ eine Darstellung von $\mathfrak{C}_z$. Daher wird

$$\int_{\mathfrak{C}_z} f(z)\,dz = \int f[\varphi(w(t))]\varphi'(w(t))\,w'(t)\,dt = \int_{\mathfrak{C}_w} f(\varphi(w))\,\varphi'(w)\,dw.$$

Besonders lehrreich ist es, ein Integral von der folgenden Form

$$\int r(z, \sqrt{z^2-1})\,dz,$$

wo $r(z, \sqrt{z^2-1})$ eine rationale Funktion seiner Argumente ist, zu betrachten. Um sich jederzeit über den in den einzelnen Punkten des Integrationsweges zunehmenden Wert der Wurzel klar zu sein, tut man gut, sich den Integrationsweg auf der S. 99 betrachteten Riemannschen Fläche der Quadratwurzel $\sqrt{z^2-1}$ zu denken. Zur Behandlung des Integrales wird es dann zweckmäßig sein, die Fläche auf eine schlichte w-Ebene abzubilden. Das kann nach S. 99 durch die Funktion

$$w = z + \sqrt{z^2-1}$$

geschehen. Dann wird, wie man schon im reellen Gebiet lernt, aus dem Integral das folgende

$$\int r\left(\frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right),\ \frac{1}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{w^2}\right)dw,$$

also ein Integral einer rationalen Funktion von w.

Tatsächlich ist ja auch unsere Abbildung weiter nichts als eine der aus der reellen Integralrechnung bekannten rationalisierenden Substitutionen. Man würde sich leicht überzeugen können, daß auch eine jede andere solche Substitution auf eine schlichte Abbildung unserer Fläche führt. Auch kann man jede derartige Abbildung, z. B. die andere auf S. 100 erwähnte, zum Rationalisieren des Integranden brauchen.[2])

Auch die allgemeineren Integrale, deren Integrand eine rationale Funktion von z und der Quadratwurzel aus irgendeinem Polynom zweiten Grades ist, können in ähnlicher Weise behandelt werden. Tatsächlich haben wir ja auch schon S. 100 gesehen, daß man durch eine lineare Abbildung eine jede zweiblättrige Riemannsche Fläche mit zwei Verzweigungspunkten auf die hier betrachtete abbilden kann.

1) Bei nicht differenzierbaren Integrationswegen muß noch vorher durch differenzierbare approximiert werden.

2) Man vgl. auch das Beispiel auf S. 168.

§ 5. Der Weierstraßsche Mittelwertsatz.

Aus der reellen Integralrechnung ist der folgende Satz bekannt:

Wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ fur $a \leqq x \leqq b$ stetig sind, wenn $\varphi(x)$ außerdem von einerlei Vorzeichen ist, so gibt es eine Stelle ζ des Intervalles ($a \leqq \zeta \leqq b$), so daß

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\zeta)\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

ist. Es soll sich hier darum handeln, eine Ubertragung dieses Satzes auf das komplexe Gebiet kennenzulernen. *Es sei also* $\mathfrak{C}$ *eine rektifizierbare, die Punkte* $z = a$ *und* $z = b$ *verbindende Kurve.* $z = z(t)$ $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ *sei eine Parameterdarstellung derselben.* $f(z)$ *sei eine auf der Kurve* $\mathfrak{C}$ *stetige,* $\varphi(z)$ *eine auf der Kurve stetige und positive Funktion. Ferner sei* Γ *die Menge der Werte, welche* $f(z)$ *auf* $\mathfrak{C}$ *annimmt. Endlich sei* K *die kleinste abgeschlossene konvexe Menge*[1]*), welche* Γ *enthält. Dann gibt es in* K *eine Stelle* ζ, *fur die*

$$\int_\alpha^\beta f(z)\,\varphi(z)\,dt = \zeta\int_\alpha^\beta \varphi(z)\,dt$$

gilt. Zum Beweise zeige ich, daß der Wert

$$\mu = \frac{\int_\alpha^\beta f(z)\varphi(z)\,dt}{\int_\alpha^\beta \varphi)z)\,dt}$$

einem jeden Γ umschließenden konvexen Polygon angehort. Zu diesem Zwecke reicht es aus, irgendeine Gerade zu betrachten, die Γ nicht trifft, und zu zeigen, daß μ stets derselben durch diese Gerade bestimmten Halbebene angehort wie Γ selbst. Daraus ergibt sich ja dann sofort, daß μ einem jeden Γ umschließenden konvexen Polygon angehort. Daher gehort Γ auch der kleinsten konvexen Menge an. Denn darunter versteht man ja den Durchschnitt aller konvexen Polygone, welche Γ umschließen. Wir wollen also zeigen, daß die Annahme, Γ und μ lagen auf verschiedenen Seiten einer Geraden, nicht zutreffen kann.

Sei also g eine Gerade, die Γ und μ trennt; dann wahle ich eine ganze lineare Funktion $l(\mathfrak{z}) = A\,\mathfrak{z} + B$ so, daß $l(\mu) = 0$ ist und daß g durch die Abbildung

1) Unter einer konvexen Menge versteht man eine Menge, die mit je zweien ihrer Punkte auch deren geradlinige Verbindung enthalt, also z. B einen Kreis, ein Dreieck, ein Polygon ohne einspringende Ecken, eine Strecke u. dgl. Unter der kleinsten, eine gegebene Punktmenge enthaltenden Menge versteht man den Durchschnitt aller konvexen Polygone, welche die gegebene Menge umschließen, d. h die allen diesen Polygonen gemeinsame Menge.

$w = l(z)$ in eine Parallele zur imaginären Achse der w-Ebene übergeht. Γ möge dabei in eine der Halbebene $\Re(w) > 0$ angehörige Menge Γ' übergehen. Dann müßte also

$$A \frac{\int_\alpha^\beta f(z)\varphi(z)dt}{\int_\alpha^\beta \varphi(z)dt} + B = \frac{\int_\alpha^\beta \varphi(z)(Af(z) + B)dt}{\int_\alpha^\beta \varphi(z)dt}$$

sein. Nun ist aber
$$\Re(Af(z) + B) > 0,$$
weil ja nach Voraussetzung $\Re(\Gamma') > 0$ ist. Daher kann die angeschriebene Gleichung nicht richtig sein, und daher ist unsere ganze Annahme, μ und Γ lägen auf verschiedenen Seiten von g, die wir im Widerspruch mit dem zu beweisenden Satze machten, falsch. Derselbe ist somit bewiesen.

Aufgabe. Man kann aus dem Mittelwertsatz auch die schon S. 108 gegebene Abschätzung

$$\int_a^b F(z)dz \leqq \int_0^L |F(z)|\, ds$$

wieder gewinnen, in der s die Bogenlänge, L die Lange der Kurve bedeutet. Dazu hat man nur

$$f(z) = \left[\operatorname{sgn} F(z)\right]\frac{dz}{ds} \text{ und } \varphi(z) = |F(z)|$$

zu wählen.[1]) Die Menge Γ besteht dann aus lauter Punkten vom Betrage Eins. Weil ja

$$\left|\frac{dz}{ds}\right|^2 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$$

ist, denn s sollte doch die Bogenlänge sein.

§ 6. Der Hauptsatz der Funktionentheorie.

1. Formulierung. Wir haben mehrfach Beispiele von Integralen kennengelernt, welche vom Integrationsweg unabhangig waren. Freilich begegneten uns beim Logarithmus auch Integrale, die vom Verlauf des Weges abhingen. Wenn wir nämlich $\int \frac{dz}{z}$ uber einen geschlossenen, Null umschließenden Weg integrieren, so kommt nicht Null heraus, während das Integral Null wird, wenn der Weg ganz in einem Kreise verläuft, der Null ausschließt. Denn darin ist jeder Zweig des Logarithmus eindeutig erklärt. Null kommt also heraus, wenn in dem vom Integrationsweg umschlossenen Bereiche der Integrand

1) Vgl. die Erklärung von sgn. z auf S. 11.

stetig ist; ist er unstetig wie $\frac{1}{z}$ bei $z = 0$, so kann ein von Null verschiedener Wert, oder auch, wie bei $\frac{1}{z^2}$, der Wert Null herauskommen.

Zu zeigen, daß in gewissen Fallen das Integral vom Wege unabhangig ist, lauft immer darauf hinaus, zu zeigen, daß das uber eine geschlossene Kurve erstreckte Integral verschwindet. Denn seien $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ zwei a und b verbindende Wege, so ist die Gleichung $\int\limits_{(\mathfrak{C}_1)a}^{b} = \int\limits_{(\mathfrak{C}_2)a}^{b}$ gleichbedeutend mit $\int\limits_{(\mathfrak{C}_1)a}^{b} + \int\limits_{(\mathfrak{C}_2)b}^{a} = 0$ und diese wieder mit $\int\limits_{\mathfrak{C}} = 0$, wenn wir die Kurve mit $\mathfrak{C}$ bezeichnen, welche entsteht, wenn wir $\mathfrak{C}_1$ von a bis b und dann $\mathfrak{C}_2$ von b nach a durchlaufen.

Wir wollen nun den folgenden auch unter dem Namen *Cauchyscher Integralsatz* bekannten *Hauptsatz der Funktionentheorie* beweisen:

In einem einfach zusammenhangenden[1]) *schlichten endlichen Bereich B sei die Funktion $f(z)$ eindeutig und analytisch. In diesem Bereich verlaufe die geschlossene rektifizierbare Kurve* $\mathfrak{C}$ (Fig. 38). *Dann ist*

$$\int\limits_{(\mathfrak{C})} f(z)\,dz = 0.$$

Für die Gultigkeit des Satzes und fur die Beweismethode ist es wesentlich, daß der Integrationsweg ganz dem Inneren des Bereiches angehort.

2. Zurückführung des Beweises auf Dreiecke. Der Beweis wird in mehreren Schritten gefuhrt. Zunachst wird bemerkt, daß es genugt, den Satz fur Polygone zu beweisen. Denn man kann ja (nach S. 110) jedes Integral beliebig genau durch ein Polygonintegral approximieren.[2]) Weiter bemerken wir, daß es stets moglich ist, ein solches Polygon zufolge seiner Selbstuberkreuzungen in endlich viele gewöhnliche Polygone ohne Selbstuberkreuzung zu zerlegen.

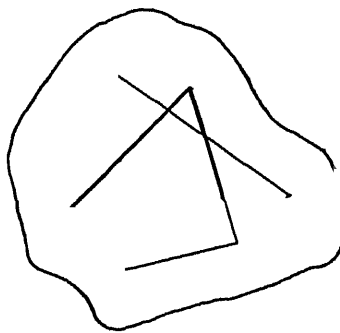



Fig. 38.

Fig. 39.

1) Wegen des Begriffes „einfach zusammenhangend" s. S. 86.

2) Wenn man die Polygonecken so wahlt, daß der Abstand zweier aufeinanderfolgender kürzer ist als der Abstand der Kurve vom Bereichrand, so verläuft das Polygon ganz im Bereiche. So muß es aber gewahlt werden.

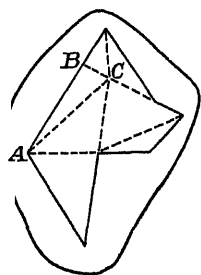
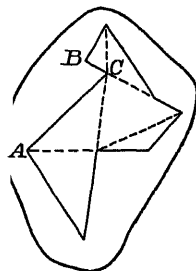
In dem Beispiel der Fig. 39 kommen zwei solche Polygone heraus, deren eines durch stärkeres Ausziehen der Linien kenntlich gemacht wurde. Fur diese stets mögliche Zerlegung in einfache, d. h. von Uberkreuzungen freie Polygone gilt folgende Regel. Man denke sich das Polygon von irgendeinem seiner Punkte aus durchlaufen. Man achte darauf, wann zum ersten Male eine bereits durchlaufene Stelle nochmals passiert wird. Die Polygonstucke, welche man zwischen dem ersten und dem zweiten Passieren dieses Punktes durchlaufen hat, machen ein einfaches Polygon aus. Denkt man sich dies Polygon herausgehoben, so hat man ein erstes einfaches Polygon abgesondert und kann nun mit den noch verbleibenden Stucken des ursprunglichen Polygons ebenso fortfahren.

Nach dem Gesagten genugt es also, den Hauptsatz für einfache Polygone zu beweisen. Denn wegen der eben vorgenommenen Zerlegung kann das Integral uber ein jedes Polygon als Summe der Integrale uber die einzelnen einfachen Polygone dargestellt werden, die bei der Zerlegung herauskommen, und muß daher wie diese verschwinden.

Ein solches einfaches Polygon zerlegt die Ebene[1]) in zwei Bereiche, sein Inneres und sein Außeres. Das Innere konnen wir durch gerade Querschnitte in Dreiecke[2]) zerlegen (Fig. 40). Nehmen wir nun den Satz fur Dreiecke als bewiesen an, dann ist das Integral uber das ursprungliche Polygon dem Integral uber dasjenige Polygon gleich, welches man erhalt, wenn man ein Randdreieck weglaßt. Lassen wir also in Fig. 40 das Dreieck ABC weg, so bleibt das Polygon der Fig. 41 ubrig.

Fig 40

Fig 41

Das uber das Polygon der Fig. 40 erstreckte Integral ist gleich dem Integral erstreckt uber das Polygon der Fig. 41, vermehrt um das Integral über das Dreieck ABC. Dabei mussen aber die Durchlaufungsrichtungen gehörig beachtet werden! Der gemeinsame Teil der beiden Polygone muß also im gleichen Sinne durchlaufen sein, und das Dreieck muß in dem Sinne durchlaufen werden, den es von Fig. 40 mitbringt. Dann ist der Erfolg der, daß in Fig. 41 und im Dreieck die ge-

1) Man vgl. den Beweis auf S. 81.

2) Dies beweist man nach Herrn Prüfer am einfachsten so: Fur konvexe Polygone ist die Behauptung unmittelbar klar, weil dann die gerade Verbindungsstrecke je zweier Ecken dem Polygoninneren angehört. Ein beliebiges Polygon aber kann man in konvexe Polygone zerschneiden, indem man alle Seiten insoweit verlangert, als diese Verlangerungen dem Polygoninneren angehören.

meinsamen Seiten AC und BC in verschiedener Richtung durchlaufen werden. Zerlegt man nun alle Integrale in die Summe der Integrale uber die einzelnen Seiten, so fallt die Summe

$$\int_A^C + \int_C^A \quad \text{sowie} \quad \int_A^C + \int_C^A$$

aus der Integralsumme heraus. Die Behauptung erweist sich so tatsachlich als richtig. Wenn man diesen Schluß wiederholt, so muß nach endlichvielen Schritten vom ganzen Polygon nur noch ein Dreieck bleiben, denn es sind ja nur endlichviele da, die wir weglassen können. Daher ergibt sich, daß das Integral über das Polygon der Fig. 40 einem Dreiecksintegral gleich ist. Es verschwindet also wie dieses. Wir brauchen also tatsachlich den Hauptsatz nur fur *Dreiecke* zu beweisen. Dieser Aufgabe wenden wir uns jetzt zu.

Fig 42.

3. Beweis für Dreiecke. Ich betrachte das Dreieck $\varDelta$ der Fig. 42. Es sei etwa

$$\left|\int_{\varDelta} f(z)\,dz\right| = M.$$

Dann zerlege ich, wie in Fig. 43 angedeutet ist, nach dem Vorgang des Herrn Pringsheim das Dreieck durch Parallele zu den Seiten in vier kongruente Dreiecke und sehe, daß

$$\int_{\varDelta} = \int_{\varDelta_1} + \int_{\varDelta_2} + \int_{\varDelta_3} + \int_{\varDelta_4}$$

ist, wenn die Dreiecke so durchlaufen werden, wie dies Fig. 43 angibt. Dahor muß mindestens eines dieser Integrale dem Betrage nach großer oder gleich $\frac{M}{4}$ sein. Dasjenige Dreieck, bei dem dies zutrifft, bezeichne ich weiter mit $\varDelta_1$. Dann verfahren wir mit ihm wie eben mit $\varDelta$ und erhalten ein neues Dreieck $\varDelta_2$, fur das

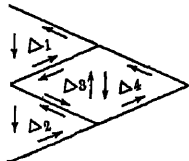
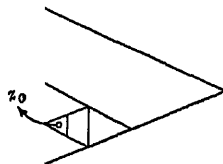
$$\left|\int_{\varDelta_2} f(z)\,dz\right| \geqq \frac{M}{4^2}$$

ist. Dies Teildreieck von $\varDelta_1$ behandeln wir ebenso. So erhalten wir eine Folge ineinandergeschachtelter Dreiecke (Fig. 44), deren innerster Punkt z_0 sei. Merken wir uns noch an, daß sich bei jedem Schritt der Umfang der Dreiecke auf die Hälfte verkleinert. Sei

Fig. 43

Fig. 44

also U der Umfang von Δ, U_n der von Δ_n, so ist $U_n = \frac{U}{2^n}$. Fur den Wert der Integrale aber gilt

$$\left|\int\limits_{\Delta_n} f(z)\,dz\right| \geqq \frac{M}{4^n}.$$

Bis jetzt haben wir von der Differenzierbarkeit von $f(z)$ noch keinen Gebrauch gemacht. Das muß nun geschehen. Denn ohne diese Annahme ist der Cauchysche Integralsatz sicher nicht richtig. Man betrachte nur etwa das Integral $\int x\,dz$ erstreckt uber die beiden Wege von (0,0) nach (a, b), welche aus je zwei zu den Koordinatenachsen parallelen Geraden bestehen. Der eine gibt $\frac{a^2}{2} + iab$, der andere aber $\frac{a^2}{2}$.

Wir setzen also nun voraus, daß $f(z)$ analytisch ist. Sei dann z_0 die Koordinate des innersten Punktes P, so ist wegen der Differenzierbarkeit in z_0:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Es gibt also eine Funktion $\delta(\varepsilon)$, so daß fur $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$ stets

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|$$

ist. Von einer gewissen Nummer $N(\varepsilon)$ an aber liegen die Dreiecke Δ_n in einem mit dem Radius $\delta(\varepsilon)$ um z_0 geschlagenen Kreise, so daß man dann die gefundene Abschatzung auf ihren Integranden anwenden kann. Dann wird

$$\left|\int\limits_{\Delta_n} f(z)\,dz - f(z_0)\int\limits_{\Delta_n} dz - f'(z_0)\int\limits_{\Delta_n}(z - z_0)\,dz\right| < \varepsilon \left|\int\limits_{\Delta_n} |z - z_0|\,dz\right|.$$

Betrachten wir nun die einzelnen hier vorkommenden Integrale etwas naher. Die auf der linken Seite der Ungleichheit verschwinden alle bis auf $\int\limits_{\Delta_n} f(z)\,dz$, von dem wir das noch nicht wissen. Das folgt aus den auf S. 111 betrachteten Beispielen.

Im Integral der rechten Seite aber wird $|z - z_0|$ kleiner als der Umfang des Dreieckes Δ_n. Denn z ist ein Punkt auf dem Dreieck, wahrend z_0 im Inneren oder am Rande liegt. Die Entfernung zweier derartiger Punkte ist naturlich kleiner als die langste Dreiecksseite, also erst recht kleiner als der Umfang. Daher wird nach S. 108

$$\left|\int\limits_{\Delta_n} |z - z_0|\,dz\right| < \frac{U^2}{4^n}.$$

Daher ist nun
$$\left|\int_{\Delta_n} f(z)\,dz\right| < \varepsilon\frac{U^2}{4^n}.$$

Da aber andererseits
$$\left|\int_{\Delta_n} f(z)\,dz\right| \geqq \frac{M}{4^n}$$

war, so ist nun
$$\frac{M}{4^n} < \varepsilon\frac{U^2}{4^n}.$$

Daraus folgt, daß $M < \varepsilon U^2$ ist. Da aber ε beliebig gewählt werden kann, so ist $M = 0$. Daher ist also $\int_{\Delta} f(z)\,dz = 0$. Denn M war der Betrag dieses Integrales. Damit ist der Integralsatz bewiesen.

4. Folgerungen. Aus dem bewiesenen Satz folgt, *daß jede in einem einfach zusammenhängenden Bereiche eindeutige analytische Funktion $f(z)$ ein Integral besitzt,* d. h. daß es bis auf eine additive Konstante genau eine analytische Funktion $J(z)$ gibt, die gleichfalls im Bereiche B eindeutig ist, und deren Ableitung $f(z)$ ist. Denn betrachten wir das Integral

$$J(z) = \int_a^z f(\zeta)\,d\zeta.$$

Einen Weg, über den es zu erstrecken ist, brauchen wir nun nicht mehr anzugeben, denn, wie schon S. 118 angegeben, folgt aus dem nun bewiesenen Hauptsatz, daß der Wert des Integrales davon unabhängig ist, über welchen in B gelegenen Weg man es erstreckt. Das Integral $J(z)$ stellt also eine in B eindeutige Funktion dar. Wir zeigen, daß sie analytisch ist, und daß $f(z)$ ihre Ableitung ist. Es wird nämlich

$$\frac{J(z) - J(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{\int_{z_0}^{z}[f(\zeta) - f(z_0)]\,d\zeta}{z - z_0}.$$

Da aber $f(z)$ bei z_0 stetig ist, so gibt es eine Funktion $\delta(\varepsilon)$, so daß $|f(\zeta) - f(z_0)| < \varepsilon$ ist für $|\zeta - z_0| < \delta(\varepsilon)$. Da weiter der Integrationsweg von z_0 bis z geradlinig gewählt werden darf, so ist seine Länge $|z - z_0|$. Daher wird

$$\int_{z_0}^{z}[f(\zeta) - f(z_0)]\,d\zeta < \varepsilon\,|z - z_0|.$$

Daher ist
$$\left|\frac{J(z) - J(z_0)}{z - z_0} - f(z_0)\right| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |z - z_0| < \delta(\varepsilon).$$

Also ist $J(z)$ analytisch und $f(z)$ ist seine Ableitung. *Also ist nun auch im Differentiationsprozeß die Umkehrung des Integrationsprozesses erkannt.*

5. Verallgemeinerung. Man kann den Cauchyschen Integralsatz leicht auf Funktionen ausdehnen, welche in *nichtschlichten* einfach zusammenhangenden *Bereichen* eindeutig und analytisch erklart sind. Wir nennen dabei einen mehrblattrigen Bereich einfach zusammenhangend, wenn in ihm eine eindeutige analytische Funktion $w = \psi(z)$ erklart ist, welche ihn — alles im Sinne der Festsetzungen von S. 69ff. — auf einen schlichten einfach zusammenhangenden Bereich abbildet. Wenn dann in dem mehrblättrigen Bereich B eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ vorliegt, so geht dieselbe durch die Abbildung in eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}'$ des schlichten Bereiches B' uber, die nach S. 114 rektifizierbar ist, wenn dies für $\mathfrak{C}$ zutrifft. Dann ist

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\, dz = 0,$$

wenn $f(z)$ in B eindeutig und analytisch ist. Denn sei $w = \psi(z)$ die erwahnte Abbildungsfunktion, $z = \varphi(w)$ ihre gleichfalls als analytisch angenommene Umkehrungsfunktion[1]), so wird nach S. 114

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\, dz = \int_{\mathfrak{C}'} f(\varphi(w))\, \varphi'(w)\, dw .$$

Dies letztere Integral ist aber nach dem Hauptsatz Null. Damit ist die verallgemeinerte Fassung des Integralsatzes bewiesen

§ 7. Anwendung des Hauptsatzes auf die Berechnung bestimmter Integrale.

Der Hauptsatz leistet oft gute Dienste bei der Auswertung bestimmter Integrale. Ich will dies jetzt nur an einem einzigen viel behandelten Beispiel zeigen.

Es sei die Berechnung des bestimmten Integrales $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$, erstreckt uber die positive reelle Achse als Aufgabe vorgelegt. Auch der Nachweis, daß dies Integral uberhaupt konvergiert, wird sich aus unseren Betrachtungen mit ergeben.

Ich gehe von dem Integral $\int \frac{e^{iz}}{z}\, dz$ aus. Es moge uber das aus der Fig. 45 ersichtliche Kreisbogenviereck erstreckt werden. Es hat naturlich den Wert Null, weil der Integrand

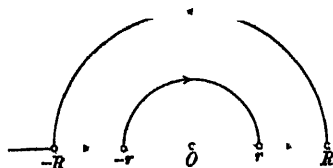



Fig. 45.

1) Wir werden spater (S. 195) beweisen, daß $\varphi(w)$ stets dann analytisch ist, wenn dies fur $\psi(z)$ zutrifft.

an allen von Null und Unendlich verschiedenen Stellen analytisch ist. Nun zerlege ich das Integral in naheliegender Weise in vier Teilintegrale und fasse die beiden, uber Stucke der reellen Achse erstreckten Integrale

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

in eines zusammen. Es wird namlich

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iz}\,dz}{z} = -\int_{r}^{R} \frac{e^{-iz}\,dz}{z}.$$

Also wird
$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{iz}\,dz}{z} = 2i\int_{r}^{R} \frac{\sin z}{z}\,dz.$$

Daher hat man jetzt $2i\int_{r}^{R} \frac{\sin z}{z}\,dz + \int_{-r+r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{-R+R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0.$

Um das Integral $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin z}{z}\,dz$ zu finden, wird man jetzt $r \to 0$ und $R \to \infty$ streben lassen. Dabei strebt das Integral $\int_{-R\ R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$ selbst gegen Null. Um einzusehen, daß fur alle genugend großen R das Integral

$$\int_{-R\ R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = i\int_{0}^{\pi} e^{-R\sin\varphi + iR\cos\varphi}\,d\varphi \quad (z = Re^{i\varphi})$$

dem Betrage nach kleiner als eine beliebig gegebene positive Zahl ε wird, zerlege ich dies Integral in drei Teilintegrale:

$$\int_{0}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi-\delta} + \int_{\pi-\delta}^{\pi}.$$

Hier wähle ich die positive Zahl δ so klein, daß die beiden Integrale

$$\int_{0}^{\delta} \quad \text{und} \quad \int_{\pi-\delta}^{\pi}$$

dem Betrage nach kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ werden. Es wird ja z. B.

$$\int_{0}^{\delta} d\varphi\, e^{-R\sin\varphi + iR\cos\varphi} \leqq \int_{0}^{\delta} d\varphi\, e^{-R\sin\varphi} \leqq \delta, \quad \text{weil} \quad e^{-R\sin\varphi} \leqq 1 \quad \text{ist.}$$

Nachdem so die Zahl $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ *festgelegt* ist, betrachte ich das Integral $\int\limits_{\delta}^{\pi-\delta} d\varphi e^{-R\sin\varphi + iR\cos\varphi}$ weiter. Wieder gilt zunächst

$$\left|\int\limits_{\delta}^{\pi-\delta} e^{-R\sin\varphi} e^{iR\cos\varphi} d\varphi\right| < \int\limits_{\delta}^{\pi-\delta} d\varphi e^{-R\sin\varphi}.$$

In diesem Integral gilt nun aber

$$e^{-R\sin\varphi} < e^{-R\sin\delta}.$$

Denn fur $\delta \leqq \varphi \leqq \pi - \delta$ ist ja $\sin\varphi \geqq \sin\delta$. Daher wird nun

$$\int\limits_{\delta}^{\pi-\delta} d\varphi e^{-R\sin\varphi + iR\cos\varphi} \leqq (\pi - 2\delta) e^{-R\sin\delta}.$$

Fur genugend großes R wird dies aber kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$. Daher ist in der Tat

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\overset{\frown}{-R+R}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Nun bleibt noch das Integral

$$\int\limits_{\overset{\frown}{-r+r}} \frac{e^{iz}}{z} dz = i\int\limits_{\pi}^{0} e^{-r\sin\varphi + ir\cos\varphi} d\varphi \quad (z = re^{i\varphi}).$$

Fur $r \to 0$ kommt das Integral $i\int\limits_{\pi}^{0} d\varphi = -\pi i$ heraus. Denn der Integrand

$$e^{-r\sin\varphi + ir\cos\varphi} = e^{iz}$$

strebt fur $r \to 0$ gleichmäßig in φ gegen Eins.[1]) Daher wird wirklich

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{\overset{\frown}{-r+r}} \frac{e^{iz}}{z} dz = -\pi i.$$

Daher wird nun $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2}$.

1) D. h. es gibt eine Zahl $\varrho = \varrho(\varepsilon)$ derart, daß für alle $r < \varrho(\varepsilon)$ und beliebige φ

$$|e^{-r\sin\varphi + ir\cos\varphi} - 1| = |e^{iz} - 1| = |iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \cdots| < \varepsilon \quad \text{gilt.}$$

Sechster Abschnitt.

Die Cauchysche Integralformel.

§ 1. Ein Spezialfall der Cauchyschen Integralformel.

1. Formulierung. In einem Kreise K sei die Funktion $f(z)$ eindeutig und analytisch. K_1 sei ein konzentrischer Kreis von kleinerem Radius und z ein Punkt aus seinem Inneren. Dann ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{K_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Dabei ist das Integral so über den Kreis K_1 zu erstrecken, daß bei der Durchlaufung das Innere zur Linken bleibt. Das sei immer durch die verwendete Schreibweise angedeutet. Da der Integrand eine bei $\zeta = z$, also in K, singuläre Funktion ist, so folgt aus dem Integralsatz unmittelbar nichts.

2. Erster Beweis. Wir zeigen zunächst, daß

$$\int\limits_{(L)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$$

ist, wenn das Integral über den in Fig. 46 angegebenen Weg L erstreckt wird. Er besteht aus einem Kreisbogen K_2 vom Radius ϱ, dessen Mittelpunkt z ist, aus zwei Strecken und einem Bogen des Kreises K_1. Die Kurve L ist in einem aus Fig. 46 ersichtlichen einfach zusammenhängenden Bereich gelegen, der von K und einer Strecke begrenzt ist, welche z und K verbindet. In diesem einfach zusammenhängenden Bereiche sind aber sowohl $f(\zeta)$ wie $\zeta - z$ analytische Funktionen von ζ und der Nenner $\zeta - z$ verschwindet in diesem Bereiche nicht. Daher kann man auf die Kurve L den Hauptsatz anwenden. Also ist

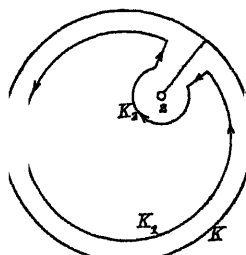
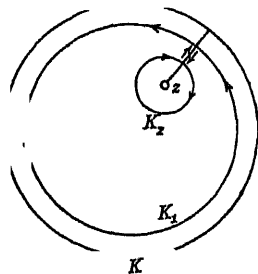



Fig. 46.

Fig. 47

$$\int\limits_{(L)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

Wir ändern nun die Kurve L dadurch ab, daß wir die Kreisbogen größer werden lassen. Dabei wird also der von den beiden Strecken eingeschlossene Winkel kleiner. Immer bleibt das Integral Null. Wir vergleichen es nun mit dem Integral über die aus Fig. 47 ersichtliche Kurve $\mathfrak{C}$. Sie besteht aus den beiden vollen Kreisen und dem zweimal durchlaufenen geradlinigen Stück. Ähnlich war die Kurve L zerlegt. Je mehr sich diese der Kurve $\mathfrak{C}$ nähert, um so weniger wird $\int\limits_L$ von $\int\limits_{\mathfrak{C}}$ abweichen. Das folgt so unmittelbar aus der Stetigkeit der Funktion $f(\zeta)$, daß wohl keine längere Darlegung erforderlich ist. Daher ist auch

$$\int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

Nun ist aber in diesem Integral der geradlinige Bestandteil zweimal in verschiedener Richtung durchlaufen. Daher wird

$$\int\limits_{\substack{K_1\\ \circlearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int\limits_{\substack{K_2\\ \circlearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Dieses letztere Integral ist nun von der Größe des Kreisradius ϱ von K_2 unabhängig. Denn unsere Betrachtung gilt für jedes ϱ. Zur Auswertung des Integrales führen wir Polarkoordinaten ein. Wir setzen $\zeta - z = \varrho e^{i\vartheta}$.

Dann wird
$$\int\limits_{\substack{K_2\\ \circlearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = i \int\limits_0^{2\pi} f(z + \varrho e^{i\vartheta})\, d\vartheta$$

Da aber das Integral von ϱ unabhängig ist, so gilt

$$\int\limits_0^{2\pi} f(z + \varrho e^{i\vartheta})\, d\vartheta = \lim_{\varrho \to 0} \int\limits_0^{2\pi} f(z + \varrho e^{i\vartheta})\, d\vartheta = 2\pi f(z)$$

Daher ist nun
$$\int\limits_{\substack{K_2\\ \circlearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i f(z).$$

Also ist
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{K_1\\ \circlearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Damit ist unser Ziel erreicht.

3. Zweiter Beweis. Man kann nicht auf die Kurve $\mathfrak{C}$ unmittelbar den Integralsatz anwenden, um zu sehen, daß das Integral verschwindet. Denn zwar begrenzt $\mathfrak{C}$ einen einfach zusammenhängenden Bereich, in welchem $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$

regulär ist, aber $\mathfrak{C}$ liegt nicht in einen solchen Bereich eingebettet. Allerdings kann man sich hier leicht einen einfach zusammenhängenden Bereich beschaffen, in den $\mathfrak{C}$ eingebettet ist. Damit erhalten wir einen *zweiten Beweis* unseres Resultates. Der Bereich, den ich meine, ist mehrblättrig. Wir führen die bei z und bei ∞ verzweigte Riemannsche Fläche der Funktion $\sqrt{\zeta - z} = w$ ein. Auf ihr werde eine analytische Funktion von ζ dadurch erklärt, daß wir festsetzen, sie solle in übereinanderliegenden Punkten der Fläche, d. h. in Punkten mit gleichem ζ, denselben durch $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ gegebenen Wert haben. Auf dieser Fläche denken wir uns nun in einem Blatt die Kurve $\mathfrak{C}$. Über dem Kreise K denken wir beide Blätter durchschnitten. So sondern wir von der Riemannschen Fläche einen die Kurve $\mathfrak{C}$ enthaltenden Bereich aus, den wir durch $w = \sqrt{\zeta - z}$ auf einen schlichten Bereich der w-Ebene abbilden. Denken wir uns noch im anderen Blatt der Fläche, welches $\mathfrak{C}$ nicht enthält, wieder eine Gerade gezogen, welche z mit K verbindet, so wird diese etwa auf die w-Gerade der Fig. 48 abgebildet. Diese Gerade zusammen mit dem Bilde K' des Kreises K begrenzt einen einfach zusammenhängenden Bereich (S. 86), dem $\mathfrak{C}'$, das Bild von $\mathfrak{C}$, angehört. Aus dem

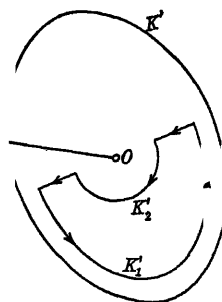



Fig. 48.

$$\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

wird

$$2\int_{\mathfrak{C}'} \frac{f(z + w^2)}{w}\, dw.$$

In dem einfach zusammenhängenden Bereich der Fig. 48 ist aber $\frac{f(z + w^2)}{w}$ regulär. Daher ist

$$\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(z + w^2)}{w}\, dw = 0.$$

Daher ist auch

$$\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

Das war der zweite Weg, auf dem man beweisen kann, daß

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Dieser Weg ist es, der sich hernach im allgemeinen Fall der Integralformel als der gangbarste herausstellen wird.

4. Dritter Beweis. Es gibt noch einen *dritten Beweis,* der die vorhin bezeichnete Schwierigkeit vermeidet. Er knupft an die beistehende Fig. 49 an. Die Summe der beiden Integrale uber K_1 und K_2 andert sich namlich nicht, wenn man zu ihr die vier Integrale hinzufugt, welche man erhalt, wenn man den Integranden uber die beiden aus der Fig. 49 ersichtlichen geradlinigen K_1 und K_2 verbindenden Stücke in beiden Richtungen integriert. Denn, wie wir schon vorhin bemerkten, ist die Summe dieser Integrale Null. Man kann aber nun die beiden Kreisintegrale noch in je zwei Integrale zerlegen, den beiden Kreisbogen entsprechend, aus welchen nach Fig. 49 jeder der beiden Kreise nun besteht. Die so gewonnenen acht Integrale kann man aber dann in anderer Weise zusammenfassen. Sie machen namlich gerade die Summe der beiden Integrale aus, welche man erhalt, wenn man den Integranden in der Pfeilrichtung uber den Rand der beiden aus Fig. 49 ersichtlichen schraffierten Kreisbogenvierecke integriert. Aus den schon in unserem ersten Beweise angestellten Betrachtungen ergibt sich daher, daß ein jedes dieser beiden Integrale verschwindet. Daher ist also nun wieder

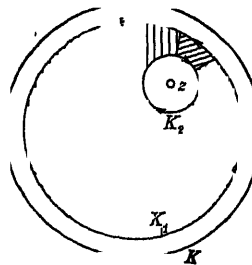



Fig 49.

$$\int_{K_1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \int_{K_2} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Und nun verlauft alles so weiter, wie wir dies schon bei unserem ersten Beweise darlegten. Man findet also erneut die Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

5. Bedeutung der Integralformel. *Diese Integralformel druckt die Werte, welche die Funktion $f(z)$ im Inneren des Kreises K_1 annimmt, durch die Werte aus, welche sie am Rande des Kreises besitzt. Der allgemeine Fall der Integralformel wird dies Ergebnis vom Kreise auf allgemeinere Bereiche ubertragen.* Die Formel zeigt also, daß die Werte, welche eine analytische Funktion im Inneren eines Kreises annimmt, schon durch ihre Werte an seinem Rande eindeutig bestimmt sind. Es ist eine gewiß merkwurdige Tatsache, daß die bloße Voraussetzung der Differenzierbarkeit derartige Folgen nach sich zieht.

Mancher Leser wird versucht sein, die hier gegebenen Beweise ohne weiteres von den Kreisen auf beliebige einfach geschlossene Kurven zu übertragen. In vielen Fällen ist das auch berechtigt. Indessen zeigt ein näheres Nach-

denken im allgemeinsten Falle doch einige gestaltliche Schwierigkeiten, die darauf beruhen, daß wir die letzten Reste der Anschauung, die wir eben bei den einfachen Kreiskurven ruhig benutzen durften, bei den allgemeineren Kurven von nicht unmittelbar zu übersehendem Verlauf durch rein begriffliche Schlüsse ersetzen müssen.[1]) Ich will daher im folgenden Paragraphen wenigstens den zweiten der Beweise voll durchführen, da sich bei ihm alles am leichtesten ergibt.

§ 2. Der allgemeine Fall der Integralformel.

1. Verallgemeinerung der Hauptsätze. *In einem zweifach zusammenhangenden Bereich B sei die Funktion φ analytisch. In ihm seien zwei geschlossene rektifizierbare Kurven $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ gegeben, welche einen Punkt z seines inneren Randes gleich oft*[2]) *umlaufen mögen. Dann ist*

$$\int_{\mathfrak{C}_1} \varphi(\zeta)\, d\zeta = \int_{\mathfrak{C}_2} \varphi(\zeta)\, d\zeta .$$

Zum Beweise wähle ich auf $\mathfrak{C}_1$ einen Punkt P_1 und auf $\mathfrak{C}_2$ einen Punkt P_2 und verbinde beide durch einen dem Bereich B angehörigen z nicht treffenden Polygonzug Π. Durchläuft man dann von P_1 aus $\mathfrak{C}_1$ im vorgeschriebenen Sinne bis P_1, geht dann auf Π zu $\mathfrak{C}_2$ über und durchläuft dies entgegengesetzt zum vorgeschriebenen Sinne und geht dann auf Π nach P_1 zurück, so hat man eine Kurve $\mathfrak{C}$ beschrieben, längs der sich $\log(\zeta - z)$ gar nicht ändert. Bildet man daher den Bereich B durch

$$w = \log(\zeta - z)$$

auf die w-Ebene ab, so erhält man einen schlichten einfach zusammenhangenden Bereich (S. 86) und die eben genannte Kurve $\mathfrak{C}$ geht in eine geschlossene, diesem Bereiche angehörige Kurve über. Aus unserem Integral wird durch diese Substitution das über diese geschlossene Kurve erstreckte

$$\int \varphi(z + e^w)\, e^w\, dw ,$$

das nach dem Cauchyschen Integralsatz verschwindet. Es hat aber den Wert

$$\int_{\mathfrak{C}_1} \varphi(\zeta)\, d\zeta - \int_{\mathfrak{C}_2} \varphi(\zeta)\, d\zeta + \int_{\underset{\curvearrowright}{\Pi}} \varphi(\zeta)\, d\zeta + \int_{\underset{\curvearrowleft}{\Pi}} \varphi(\zeta)\, d\zeta .$$

1) Man hätte z. B. einen Kreis K nötig, der z im gleichen Sinne wie $\mathfrak{C}$ einmal umläuft. Der begriffliche Inhalt dieser Angaben „in einem gewissen Sinne einmal durchlaufen" wurde aber S. 80 mit Hilfe des Logarithmus festgelegt. So führt jeder Versuch, begrifflich scharf vorzugehen, sofort auf die Methode des § 2.

2) Vgl. die Definition auf S. 80.

Da aber in den beiden über Π erstreckten Integralen der Durchlaufungssinn verschieden ist, so ergeben diese Null. So hat man tatsachlich

$$\int\limits_{\mathfrak{C}_1} \varphi(\zeta)\, d\zeta = \int\limits_{\mathfrak{C}_2} \varphi(\zeta)\, d\zeta .$$

2. Die Integralformel. Dieses allgemeine Resultat erlaubt nun sofort, den allgemeinen Fall der Integralformel zu beweisen.

In einem einfach zusammenhängenden Bereiche B sei die Funktion $f(\zeta)$ eindeutig und analytisch. $\mathfrak{C}$ sei eine geschlossene, in B verlaufende, rektifizierbare Kurve, welche $\zeta = z$ einmal im positiven Sinne umläuft. Dann ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta .$$

Aus unserem Satze folgt namlich, wenn wir ihn auf $\varphi(\zeta) \equiv \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ anwenden, daß

$$\int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int\limits_{K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta ,$$

wenn unter K ein Kreis vom Radius ϱ verstanden wird, der z im positiven Sinne umlauft und diesen Punkt zum Mittelpunkt hat. Daß das Kreisintegral aber gleich $2\pi i f(z)$ ist, sahen wir schon im vorigen Paragraphen.

3. Bemerkung. Wenn die geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ den Punkt z nach der Definition von S. 80 nicht umschließt, so zeigt die gleiche Betrachtung, daß $\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$. Das ist z. B. dann der Fall, wenn der Punkt z dem Bereiche B nicht angehort, denn dann ist $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ im ganzen Bereiche regular. Dann folgt also das Verschwinden des Integrales schon aus dem Cauchyschen Integralsatz direkt.

§ 3. Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes.

1. Formulierung. Am Anfang des vorigen Paragraphen wurde als Grundlage zur Herleitung der Integralformel ein allgemeiner Satz ausgesprochen, der als eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes auf Funktionen angesehen werden kann, die in einem zweifach zusammenhangenden Bereich eindeutig und regulär sind. Nun soll der Integralsatz seine allgemeinste Fassung fur mehrfach zusammenhängende Bereiche erhalten.

$f(z)$ sei in dem beliebigen Bereiche B eindeutig und regulär. In demselben mögen zwei geschlossene rektifizierbare Kurven $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ gegeben sein, die einen

jeden Randpunkt gleichoft umlaufen, d. h. die eine so oft wie die andere Kurve. Dann ist

$$\int_{\mathfrak{C}_1} f(z)\,dz = \int_{\mathfrak{C}_2} f(z)\,dz.$$

2. Beweis. Es genugt den Beweis unter der Annahme zu fuhren, daß $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ Polygone seien. Denn wenn man eine Kurve genugend nahe durch ein Sehnenpolygon approximiert hat, so umlauft dasselbe — wegen der *ganzzahligen* Vielfachen von $2\pi i$, um die der Logarithmus bei Durchlaufung von Kurve und Polygon wächst und wegen der Gute der Approximation — einen jeden Randpunkt ebenso oft wie die Kurve. Und wenn fur die Naherungspolygone die Integrale immer einander gleich sind, so muß das auch beim Grenzubergang zu den Kurven der Fall sein.

Seien also $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ zwei Polygone, die einen jeden Randpunkt gleich oft umschließen. Da man beide im Bereiche durch einen Streckenzug zu einem Kontinuum verbinden kann, so kann man nach Satz III S 86 einen von endlichvielen Polygonen $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_n$ begrenzten polygonalen Bereich konstruieren, der diese beiden Polygone enthalt, die Bereichrander aber ausschließt. Dieser polygonale Bereich ist somit ein Teilbereich des Gegebenen. Die beiden Polygone, durch die wir $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ ersetzten, umlaufen dann auch einen jeden einzelnen Randpunkt des polygonalen Bereiches beide gleich oft, weil man namlich einen jeden Randpunkt des polygonalen Bereiches außerhalb desselben durch einen Streckenzug mit Randpunkten des alten Bereiches verbinden kann. Das lehrt die gerade schon einmal zur Geltung gekommene, auch S. 80 verwendete Stetigkeitsbetrachtung.

Ich greife eines der beiden Polygone heraus, um das daruber erstreckte Integral naher zu untersuchen. Zunachst kann ich dies Polygon — ahnlich wie S. 91 — in eine Reihe einfach geschlossener Polygone zerlegen. Ich greife eines derselben heraus: $\mathfrak{C}_1$. Dasselbe moge das $\varkappa$-te innere Randpolygon etwa $\lambda_\varkappa$mal umlaufen ($\lambda_\varkappa$ hat also nach S. 81 einen der Werte $0, 1, -1$). Nach Satz VIII S. 89 zerlege ich das Polygon durch eine Reihe von Querschnitten in einzelne einfach geschlossene Polygone, von welchen ein jedes nur hochstens eine Randkurve umschließt, und zwar ebenso oft wie das zerlegte Polygon. So kann man das uber das Polygon $\mathfrak{C}_1$ erstreckte Integral in eine Summe von Integralen zerlegen. Ein jedes derselben ist uber ein einfach geschlossenes Polygon erstreckt, das hochstens eines der Randpolygone umschließt. Wenn nun etwa das Polygon $\mathfrak{C}_1$ das Randpolygon $\mathfrak{R}_\varkappa$ $\lambda_\varkappa$-mal umschloß und jetzt bei der Zerlegung $\mu_\varkappa$ Polygone vorkommen, die $\mathfrak{R}_\varkappa$ einmal positiv, und $\nu_\varkappa$ Polygone auftreten, die $\mathfrak{R}_\varkappa$ einmal negativ umschließen, so muß $\lambda_\varkappa = \mu_\varkappa - \nu_\varkappa$ sein. Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen lehren aber, daß zwei Poly-

gone, die $\mathfrak{R}_\varkappa$ einmal im selben Sinne umschließen, denselben Wert von $\int f(z)\,dz$ liefern.[1]) Wenn daher $\Pi_\varkappa$ irgendein einfach geschlossenes Polygon ist, das nur $\mathfrak{R}_\varkappa$ und diese Kurve nur einmal im positiven Sinne umschließt, so wird

$$\int_{\mathfrak{C}_1} f(z)\,dz = \sum \lambda_\varkappa \int_{\mathfrak{R}_\varkappa} f(z)\,dz.$$

Denselben Wert muß aber auch $\int_{\mathfrak{C}_2} f(z)\,dz$ haben. Damit wäre die Gleichheit beider Integrale erkannt und unser Satz bewiesen. Allerdings haben wir noch eines stillschweigend als richtig angesehen, daß nämlich

$$\int f(z)\,dz$$

verschwindet, wenn es über ein einfach geschlossenes Polygon Π aus B erstreckt wird, welches in seinem Inneren keine einzige der Randkurven enthält. Das ergibt sich aber sofort aus dem Integralsatz in der S. 118 gegebenen engeren Fassung, sowie man erkannt hat, daß man dies Polygon in einen einfach zusammenhängenden Teilbereich einbetten kann, in welchem $f(z)$ regulär ist. Man muß dazu ja nur nach S. 87 ein Polygon konstruieren, das in B verläuft und das Polygon Π von den Randkurven des Bereiches trennt. Man kann dieselben nämlich, weil sie alle außerhalb von Π verlaufen, miteinander zu einem Kontinuum verbinden, ohne dabei Π zu treffen.

3. Ein Spezialfall. Ein wichtiger Spezialfall des bewiesenen Satzes ist dieser: Der Bereich sei n-fach zusammenhängend. Eine Kurve $\mathfrak{C}$ möge eine jede der $n-1$ inneren Randkurven genau einmal positiv umlaufen. $\mathfrak{C}_\varkappa$ sei eine Folge von Kurven derart, daß $\mathfrak{C}_\varkappa$ die Randkurve $\mathfrak{R}_\varkappa$ genau einmal im positiven Sinne und die anderen Randkurven nullmal umläuft. Dann wird

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n-1} \int_{\mathfrak{C}_\varkappa} f(z)\,dz.$$

§ 4. Bemerkungen zur Integralformel.

1. Analytischer Charakter eines Integrals. Das in der Cauchyschen Integralformel vorkommende Integral

$$\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = J(z)$$

1) Da man das umschlossene $\mathfrak{R}_\varkappa$ und sein Inneres mit den beiden Polygonen zu einem, die übrigen Ränder und den Rest der Komplementärmenge des polygonalen Bereiches zu einem zweiten Kontinuum verbinden kann, so gibt es nach dem Corollar zu Satz III

stellt unter viel allgemeineren Voraussetzungen, als den bisher angegebenen, in einem $\mathfrak{C}$ nicht enthaltenden Bereich eine analytische Funktion von z dar. Das ist nämlich nicht nur dann der Fall, wenn die Kurve $\mathfrak{C}$ geschlossen ist und einem einfach zusammenhängenden Bereich angehört, in welchem die Funktion $f(z)$ analytisch ist, das ist vielmehr auch dann der Fall, wenn $\mathfrak{C}$ ein beliebiger rektifizierbarer Kurvenbogen ist, auf welchem $f(\zeta)$ stetig ist. Unter z ist dabei eine beliebige nicht auf der Kurve $\mathfrak{C}$ gelegene Stelle zu verstehen. Man findet nämlich dann für den Differenzenquotienten den Ausdruck

$$\frac{J(z+h)-J(z)}{h}=\int\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-z-h)}.$$

Man wird vermuten, daß dieser Ausdruck für $h \to 0$ dem Werte $\int\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^2}$ zustrebt, und in der Tat ist ja auch

$$(1)\qquad \frac{J(z+h)-J(z)}{h}-\int\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^2}=\int f(\zeta)\,d\zeta\,\frac{h}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-h)}.$$

Also wird

$$(2)\qquad \left|\frac{J(z+h)-J(z)}{h}-\int\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^2}\right|\leqq\frac{\operatorname{Max}|f(\zeta)|\,|h|\,L}{d^3},$$

wenn L die Länge der Kurve $\mathfrak{C}$ und d den Abstand zwischen $\mathfrak{C}$ und einem die Punkte z und $z+h$ enthaltenden Kreise bedeutet. Daher ist in der Tat

$$(3)\qquad \lim_{h\to 0}\frac{J(z+h)-J(z)}{h}=\int\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^2}$$

und $J(z)$ ist wirklich eine analytische Funktion von z in der Umgebung einer jeden Stelle, die nicht auf der Kurve $\mathfrak{C}$ liegt.

2. Randwerte. Man muß sich indessen sehr wohl vor der unbegründeten Vermutung hüten, daß etwa $f(\zeta)$ die Werte sein müßten, die $J(z)$ auf der Kurve $\mathfrak{C}$ annimmt. Diese Annahme wäre von Grund auf falsch. Es ist ein reiner Zufall, wenn es einmal so ist.

Nehmen wir z. B. als Integrationsweg den Einheitskreis $|z|=1$ und setzen $f(\zeta)=\frac{1}{\zeta}$, dann wird

$$J(z)=\int\frac{1}{\zeta(\zeta-z)}\,d\zeta=-\frac{1}{z}\int\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1}{z}\int\frac{d\zeta}{\zeta-z}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z}=0.$$

on S. 86 ein einfaches Polygon P, das $\mathfrak{R}_x$ und die beiden Polygone enthält, die übrigen Ränder aber ausschließt. Auf den von P und $\mathfrak{R}_x$ begrenzten Bereich wende man den ersten Satz des vorigen Paragraphen an.

Die im Einheitskreis dargestellte Funktion ist also Null. Die Randwerte aber sind $e^{-i\varphi}$. Weiter bemerke man, daß ja nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$J(z) = \int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$$

ist, wenn $f(\zeta)$ in $|z| \leqq r$ $(r > 1)$ eindeutig und analytisch ist, wenn die Integration uber $|z| = 1$ erstreckt wird, und wenn z *außerhalb* des Einheitskreises ist. Denn der Integrand ist ja im Einheitskreis analytisch und eindeutig. Also ist dann $J(z)$ eine Funktion außerhalb des Einheitskreises, die auf demselben durchaus nicht die Werte $f(\zeta)$ annimmt.

3. Ein allgemeiner Satz. Das eben Bewiesene ist ein ganz spezieller Fall eines viel allgemeineren Satzes, den wir hier anfugen wollen. *Ich verstehe unter $\varphi(z, \zeta)$ eine in einem Bereiche B analytische Funktion von z, die außerdem noch von einem Parameter ζ abhängt, welcher auf einer rektifizierbaren Kurve $\mathfrak{C}$ der ζ-Ebene variieren moge. Solange z im Bereiche B und ζ auf der Kurve $\mathfrak{C}$ liegt, möge außerdem $\varphi(z, \zeta)$ eine stetige Funktion der beiden Veranderlichen z und ζ sein.*[1] *Dann ist $J(z) = \int\limits_{\mathfrak{C}} \varphi(z, \zeta)\, d\zeta$ eine analytische Funktion von z im Bereiche B.*

Es sei eine Aufgabe fur den Leser, im Anschluß an den oben besprochenen Spezialfall, den Beweis dieses Satzes zu erbringen. Hier moge der Hinweis genugen, daß wir auf S. 174 einen sehr kurzen Beweis dieses Satzes kennen lernen werden.

Ein ganz spezieller Fall des oben genannten Satzes ist es, wenn wir $\varphi(z, \zeta) = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n}$ annehmen.

4. Anwendung auf die Ableitungen. Wir kehren damit wieder zur Integralformel zuruck. Wir nehmen als Integrationsweg eine einfach geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$, und z sei eine Stelle aus ihrem Inneren. Dann wird

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z},$$

und dieser Ausdruck ist beliebig oft differenzierbar. Denn es wird ja

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2}, \tag{4}$$

1) D. h. es soll zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon)$ geben, so daß $|\varphi(z + h_1, \zeta + h_2) - \varphi(z, \zeta)| < \varepsilon$, sobald $|h_1| < \delta(\varepsilon)$ und $|h_2| < \delta(\varepsilon)$. $z + h_1$ und z gehören dabei dem Bereiche B, ζ und $\zeta + h_2$ der Kurve $\mathfrak{C}$ an.

und das kann wieder differenziert werden; so wird

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int\limits_{\circlearrowleft\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^3}.$$

Allgemein wird

(5) $$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\circlearrowleft\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

Wir haben so das überraschende Ergebnis:

Eine jede analytische Funktion kann beliebig oft differenziert werden. Die Ableitungen aller Ordnungen sind also wieder analytische Funktionen.

Aus der Differenzierbarkeit einer Funktion komplexen Argumentes folgt also z. B. schon die Stetigkeit der Ableitung. Die Ableitung einer nur im Reellen erklärten Funktion kann bekanntlich unstetig sein. Jetzt ist sie sogar selbst wieder differenzierbar. Man erkennt, welche tiefen Konsequenzen die Voraussetzung der Differenzierbarkeit im Komplexen nach sich zieht.

§ 5. Umkehrung des Cauchyschen Hauptsatzes.

Eine reife Frucht ist es, die uns nun in den Schoß fällt. Wir wollen beweisen, *daß eine in einem Bereiche B eindeutige und stetige Funktion $f(z)$, für welche das Integral $\int\limits_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz$ verschwindet, ganz einerlei, über welche dem Bereich angehörige geschlossene Kurve es auch erstreckt wird, notwendig eine analytische Funktion ist.* Der Satz ist offenbar die Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes. Nach seinem Entdecker heißt er auch *Satz von Morera.*

Das Integral $$\int_0^z f(\zeta)\,d\zeta = J(z)$$

stellt eine im Bereiche eindeutige Funktion dar, weil das Integral vom Wege unabhängig ist (vgl. die Bemerkung auf S. 118). Diese Funktion ist aber analytisch. Denn schon S. 122 ist gezeigt, daß $J(z)$ differenzierbar ist. Es wird nach der dort angestellten Überlegung $J'(z) = f(z)$. Vorhin aber haben wir gesehen, daß die Ableitung einer analytischen Funktion selbst analytisch ist. Also ist wirklich $f(z)$ analytisch.

§ 6. Anwendung der Integralformel zur Auswertung bestimmter Integrale.

1. Erstes Beispiel. Schon die Integralformel erlaubt es ziemlich unmittelbar, manches bestimmte Integral auszuwerten. Ich gebe jetzt ein ganz ein-

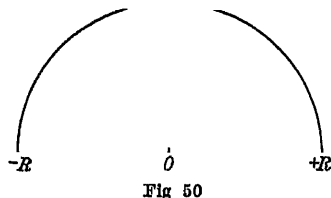
faches Beispiel, um später in dem Abschnitt über die Residuen die Betrachtung wesentlich weiter zu führen.

Es sei $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$, *erstreckt über die reelle Achse, zu berechnen.* Ein bereits von Cauchy vielfach angewendeter Gedanke knüpft daran an, daß das um den Halbkreis der Fig. 50 erstreckte Integral stets den Wert

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \pi \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}$$

Fig 50

hat. Man kann nämlich

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\frac{1}{(z+i)^{n+1}}\,dz}{(z-i)^{n+1}}$$

schreiben. Das ist aber nach Formel (5) weiter nichts als die $\frac{1}{n!}$-fache n-te Ableitung von $\frac{1}{(z+i)^{n+1}}$ an der Stelle $z = i$. Diese ist aber $\frac{(2n)!}{n!}\,\frac{1}{i}\,\frac{1}{2^{2n+1}}$. Weiter bemerkt man nun, daß das über den Kreisbogen erstreckte Integral für $R \to \infty$ gegen Null konvergiert. Denn der Integrand genügt auf dem Kreis vom Radius R der Ungleichung $\left|\frac{1}{1+z^2}\right| < \frac{1}{R^2-1}$. Schreibt man nun aber die Gleichung

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}} = \pi \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}$$

in der Form $\int\limits_{-R}^{+R} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} + \int\limits_{+R}^{-R} \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}} = \pi \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}$

und geht hier zu $R \to \infty$ über, so erhält man

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \pi \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}.$$

2. Ein weiteres Beispiel. Häufig gelingt es, durch eine einfache Substitution andersartige Integrale so umzuformen, daß man in der eben angegebenen Weise mit Hilfe der Integralformel die Auswertung leisten kann. Das gilt z. B. von dem Integral $\int\limits_0^{2\pi} \cos^{2n} x\,dx$. Macht man nämlich hier die Substitution $e^{ix} = \zeta$, so geht der Integrationsweg, also das Stück der reellen Achse:

$0 \leq x \leq 2\pi$ in die einmal durchlaufene Peripherie des Einheitskreises der ζ-Ebene über. Man erhält dann die Beziehung

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x\, dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^{2n} dx = \frac{-i}{2^{2n}} \int \frac{(1+\zeta^2)^{2n}}{\zeta^{2n+1}} d\zeta .$$

Die Integralformel lehrt wieder, daß das neue Integral der Gleichung

$$\int \frac{(1+\zeta^2)^{2n}}{\zeta^{2n+1}} d\zeta = \frac{2\pi i}{(2n)!} \left.\frac{d^{2n}(1+\zeta)^{2n}}{d\zeta^{2n}}\right/ \zeta = 0$$

genügt. Erinnert man sich aber an die Maclaurinsche Reihe, die der binomische Satz im reellen Gebiet für $(1 + \zeta^2)^{2n}$ liefert, so erkennt man in

$$\frac{1}{(2n)!} \left.\frac{d^{2n}(1+\zeta^2)^{2n}}{d\zeta^{2n}}\right/ \zeta = 0$$

den Koeffizienten von ζ^{2n} in dieser Reihe. Dieser ist aber

$$\frac{2n \cdot (2n-1) \cdots (n+1)}{1 \cdot \ \ 2 \cdot \qquad\quad n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} .$$

Daher findet man das Schlußergebnis

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x\, dx = 2\pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \quad \cdot 2n}$$

§ 7. Entwickelbarkeit der analytischen Funktionen in Potenzreihen.

1. Die Entwickelbarkeit. Eine weitere überraschende Eigenschaft der analytischen Funktionen ist die Entwickelbarkeit in Potenzreihen.

Wenn die Funktion $f(z)$ in einem Kreise K um den Punkt a als Mittelpunkt eindeutig und analytisch ist, so gibt es eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(z-a) = \sum_{n=0,1} a_n (z-a)^n,$$

für die

$$f(z) = \mathfrak{P}(z-a)$$

im ganzen Kreise gilt. Die Koeffizienten dieser Reihe drücken sich in Taylorscher Weise durch $f(z)$ aus. Es ist also

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} .$$

Der Beweis fließt aus der Integralformel, wenn man beachtet, daß $\frac{1}{\zeta - z}$ entwickelbar ist, und wenn man sich erinnert, daß man diese Reihe gliedweise

integrieren darf. Zum Beweise erstrecke man das Integral der Cauchyschen Integralformel über einen mit K konzentrischen kleineren Kreis K_1, der die Stelle z, für die man die Entwicklbarkeit zu beweisen wünscht, enthalten muß.

Nun wird $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} = \frac{1}{\zeta - a}\left(1 + \frac{z-a}{\zeta - a} + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2 + \cdot \quad\right)$.

Hält man z fest, so konvergiert diese Reihe in ζ gleichmäßig auf der ganzen Peripherie von K_1. Also gilt das gleiche für die mit $f(\zeta)$ multiplizierte Reihe. Man kann also ihr Integral durch gliedweises Integrieren bestimmen (s. S. 109). Das liefert

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\,d\zeta + (z-a)\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^2}\,d\zeta +$$

$$+ (z-a)^n \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta +$$

$$= f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots$$

Das war aber unsere Behauptung. Die Einführung der Ableitungen folgt dabei aus der S. 136 gegebenen Integraldarstellung derselben.

2. Korrolar. Wenn $f(z)$ in einem Bereiche B eindeutig und analytisch ist und a eine Stelle des Bereiches bedeutet, so läßt sich $f(z)$ in eine nach Potenzen von $z - a$ fortschreitende Reihe

$$\mathfrak{P}(z-a) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots.$$

entwickeln. *Sie konvergiert in dem größten um $z = a$ geschlagenen Kreise, welcher in B Platz hat.* Denn in diesem ist $f(z)$ ja regulär und daher folgt aus dem eben bewiesenen Satze die jetzige Behauptung.

3. Bemerkungen. Auch dies neuerliche Ergebnis muß jedem Leser außerordentlich merkwürdig vorkommen, der mit den entsprechenden Verhältnissen bei Funktionen reellen Argumentes vertraut ist. Nicht nur haben jetzt die differenzierbaren Funktionen Ableitungen aller Ordnungen, sie sind sogar in Potenzreihen entwickelbar. Auch $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ hat ja — *im Reellen* — bei $x = 0$ Ableitungen aller Ordnungen. Trotzdem wird die Funktion nicht durch ihre Taylorsche Reihe dargestellt. Denn alle Ableitungen sind Null.[1]) —

1) Näheres in meinem Leitfaden der Integralrechnung S. 75/76.

Jede Potenzreihe ist die Taylorsche Reihe der durch sie dargestellten Funktion. Das folgt schon aus der S. 37 beswiesenen gliedweisen Differenzierbarkeit der Potenzreihen. Aus

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

folgt ja allgemein

$$f^{(n)}(z) = n!\,a_n + (n+1)!\,a_{n+1} z + \frac{(n+2)!}{2} a_{n+2} z^2 + \cdots.$$

Also wird fur $z = 0$
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

4. Bestimmung einer analytischen Funktion durch Werte an einzelnen Stellen. Eine in einem Kreise analytische *Funktion* ist *also durch ihren Wert und durch die Werte ihrer Ableitungen im Kreismittelpunkt eindeutig bestimmt.* Zu jeder Wahl dieser Bestimmungsstucke gehört auch eine analytische Funktion, wofern nur die damit gebildete Reihe im Kreise konvergiert.

Man kann weiter zeigen, *daß eine analytische Funktion eindeutig durch ihre Werte in einer Punktmenge mit a als Häufungspunkt bestimmt ist.* Mit anderen Worten: *Es kann keine zwei verschiedenen in einem Kreise* $|z - a| < r$ *analytischen Funktionen geben, deren Werte in einer Punktmenge mit a als Haufungspunkt übereinstimmen.* Denn sind

$$\sum_{n=0,1} a_n (z-a)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0,1} b_n (z-a)^n$$

die Reihendarstellungen zweier solcher Funktionen, so mussen sie wegen der Stetigkeit auch fur $z = a$ ubereinstimmen. Das liefert $a_0 = b_0$. Also bleibt

$$\sum_{n=1} a_n (z-a)^n = \sum_{n=1} b_n (z-a)^n$$

fur alle ubrigen Punkte der Menge. Da kann man aber rechts und links durch $z - a$ dividieren. In allen Punkten der Menge ist also

$$\sum_{n=1} a_n (z-a)^{n-1} = \sum_{n=1} b_n (z-a)^{n-1}.$$

Wegen der Stetigkeit gilt dies auch fur $z = a$, also wird $a_1 = b_1$. So schließt man weiter und findet die Ubereinstimmung aller Koeffizienten und damit der durch die Reihen dargestellten Funktionen.

Wie man aber die Werte in den Punkten der Menge zu wahlen hat, damit es eine analytische Funktion gibt, welche sie annimmt, das ist eine schwer zu beantwortende Frage.

Wir erkennen nun weiter, daß *zwei in B analytische Funktionen im ganzen Bereiche identisch sind, falls sie in einer Punktmenge übereinstimmen, die im Inneren des Bereiches einen Haufungspunkt a besitzt.* Denn dann stimmen sie

zunachst nach dem Korrolar 2. in dem großten um a geschlagenen Kreis uberein, welcher in B Platz hat. Um dann die Ubereinstimmung in irgendeinem weiteren Punkt b einzusehen, verbinden wir ihn mit a durch eine im Bereiche verlaufende stetige Kurve. Sie hat vom Rande des Bereiches eine von Null verschiedene Entfernung d. Demnach liegt der um irgendeinen Punkt der Kurve geschlagene Kreis vom Radius d ganz im Bereiche. Schlagt man zunachst um a den Kreis vom Radius d, so stimmen in ihm die beiden Funktionen uberein. Verschiebt man dann den Mittelpunkt des Kreises auf der Kurve, so stimmen auch in dem verschobenen Kreis die beiden Funktionen uberein. Denn solange die Verschiebung nicht zu groß ist, liegen die Mittelpunkte in dem Kreise um a. In ihm stimmen die beiden Funktionen uberein, also stimmen sie auch in einer Punktmenge des verschobenen Kreises uberein, deren Haufungspunkt der verschobene Mittelpunkt ist. So kann man aber einsehen, daß bei beliebiger Verschiebung langs der Kurve immer nur Kreise herauskommen, in welchen die beiden Funktionen ubereinstimmen. Denn die Mittelpunkte der verschobenen Kreise liegen immer wieder in Kreisen, in welchen schon vorher die Ubereinstimmung erkannt wurde.

Namentlich also werden auch zwei Potenzreihen identisch sein, wenn die dargestellten Funktionen in einer Punktmenge mit Häufungspunkt im Inneren des Konvergenzkreises ubereinstimmen, auch wenn dies nicht, wie vorhin, sein Mittelpunkt ist. Es ist aber wesentlich fur den Schluß, daß stets die Haufungspunkte dem Inneren der Bereiche angehoren. So haben ja z. B. die Funktionen $\sin z$ und $e^z \sin z$ die gleichen Nullstellen, ohne identisch zu sein. Der Haufungspunkt der Nullstellen ist hier keine Stelle aus dem Inneren des Konvergenzkreises, sondern der unendlichferne wesentlich singulare Punkt.

Ware eine Stelle aus dem Inneren des Konvergenzkreises, also eine regulare Stelle der Funktion, Haufungspunkt von Nullstellen, so mußte die Funktion durchweg verschwinden, weil sie ja dann mit der Null die in unseren Sätzen vorausgesetzte Ubereinstimmung zeigte. *Daher liegen die Nullstellen einer jeden analytischen Funktion $f(z)$ in jedem Bereich, in dem $f(z)$ analytisch und eindeutig ist, isoliert,* es sei denn, daß die Funktion identisch verschwindet. Isoliertheit bedeutet ja nichts weiter, als daß keine Nullstelle Haufungspunkt von Nullstellen sein kann. Um jede Nullstelle gibt es also einen Kreis, der von weiteren Nullstellen frei ist.

5. Schluß. Die hier gefundenen Resultate lassen wieder so recht die viel tiefere Bedeutung der Differenzierbarkeitsbedingung gegenuber dem Reellen erkennen. Dort folgt aus den Werten einer stetigen differenzierbaren Funktion an unendlichvielen Stellen im allgemeinen nichts uber die Werte an den ubrigen.

Unser Ausgangspunkt für die Definition der analytischen Funktionen war die Differenzierbarkeit. Daß jede Potenzreihe eine differenzierbare Funktion

darstellt, haben wir S. 37 gezeigt. Daß jede differenzierbare Funktion in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, sahen wir in diesem Paragraphen. Dieser Umstand ermoglicht es, den Eingang in die Theorie auch von einer anderen Seite zu nehmen. Weierstraß hat tatsächlich die analytischen Funktionen als die Funktionen definiert, welche in Potenzreihen entwickelt werden konnen, und es ist in der Tat moglich, alle die Satze, die wir bisher gewannen und die wir weiterhin angeben werden, durch bloße Betrachtung von Potenzreihen abzuleiten.

S. 136 haben wir weiter erkannt, daß die differenzierbaren Funktionen mit den Funktionen identisch sind, fur die der Integralsatz gilt. Man kann auch dies zur Grundlage eines noch anderen Aufbaues machen.

§ 8. Laurentsche Reihen.

1. Laurentreihen. *Für Funktionen $f(z)$, welche in einem konzentrischen Kreisring eindeutig und analytisch sind, existiert ein Analogen zur Potenzreihenentwicklung. Es gibt dann eine nach positiven und negativen Potenzen von $(z-a)$ fortschreitende Reihe, welche in dem Kreisring konvergiert und dort $f(z)$ darstellt. Es ist also*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n,$$

a ist dabei der Mittelpunkt des Ringes. Eine solche Reihe nennt man eine *Laurentreihe.*

Der Ring moge von den Kreisen R_1 und R_2 begrenzt sein. Wenn dann K_1 und K_2 die beiden Begrenzungskreise eines etwas kleineren Ringes sind — K_1 moge den großeren Radius haben — ,und wenn z eine Stelle im Ring ist, so wird nach der Integralformel[1])

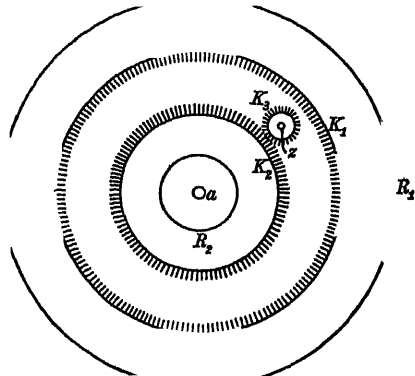
Fig. 51.

1) Nach § 3 ist namlich

$$\int\limits_{K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int\limits_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \int\limits_{K_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta .$$

Dabei bedeutet K_3 einen hinreichend kleinen Kreis um den Punkt z (Fig 51) Daher ist

$$\int\limits_{K_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i f(z),$$

und daraus ergibt sich die im Text angegebene Formel.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f_1(z) + f_2(z).$$

Das erste Integral betrachten wir fur z-Werte aus dem Inneren des Kreises K_1, das andere fur z-Werte aus dem Äußeren von K_2. Beide stellen dort analytische Funktionen dar; daß die zweite auch im Unendlichen analytisch ist, werden wir nachher sehen. Das erste Integral kann somit, wie schon S. 138/139 gezeigt, in eine im Kreise K_1 konvergente, nach positiven Potenzen von $(z - a)$ fortschreitende Reihe entwickelt werden. In Integralform drucken sich die Koeffizienten so durch die Funktion aus:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta \quad (n \geqq 0).$$

Es ist nun weiter leicht einzusehen, daß die eben gefundene Reihe nicht nur im Kreise K_1, sondern sogar im ganzen von R_1 begrenzten Kreise konvergiert. Denn der Wert des Integrales $f_1(z)$ ist von der Wahl des Kreises K_1 unabhangig. Die Summe der beiden Integrale $f_1(z) + f_2(z)$ ergibt nämlich stets $f(z)$, einerlei wie K_1 und K_2 gewahlt sein mogen. Man halte nun K_2 fest und andere K_1. Von verschiedenen Kreisen K_1 ausgehend erhält man daher auch immer dieselbe Potenzreihe $f_1(z)$. Denn die gefundenen Reihen mussen stets durch $f_2(z)$ zu $f(z)$ erganzt werden, also in gewissen Gebieten dieselbe Summe liefern. Demnach ist $f_1(z)$ eine im Kreise K_1 analytische Funktion.

Auf ganz ahnliche Weise erkennt man nun weiter, daß $f_2(z)$ eine im ganzen Äußeren von R_2 analytische Funktion ist. Zu dem Zwecke wollen wir $f_2(z)$ in eine nach Potenzen von $\frac{1}{z - a}$ fortschreitende Reihe entwickeln.

Es sei also z irgendeine endliche Stelle aus dem Außeren von K_2 Dann wird

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{-1}{z - a}\left(1 + \frac{\zeta - a}{z - a} + \left(\frac{\zeta - a}{z - a}\right)^2 + \cdots\right),$$

und das konvergiert bei festgehaltenem z gleichmaßig auf K_2. Also kann man wieder gliedweise integrieren, und man findet so

$$f_2(z) = a_{-1}\frac{1}{z - a} + a_{-2}\frac{1}{(z - a)^2} + \cdots$$

Dabei sind die Koeffizienten

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_2} f(\zeta)\,(\zeta - a)^{n-1} d\zeta.$$[1]

1) Der Umlaufssinn ist wegen Berücksichtigung eines Faktors -1 aus der Entwicklung von $\frac{1}{\zeta - z}$ gegen früher geandert.

Eine derartige, außerhalb eines Kreises konvergente Reihe stellt eine Funktion dar, welche beim Übergang zu ∞ einen bestimmten Grenzwert hat. Um das zu sehen, muß man nach S. 49 $\frac{1}{z-a} = t$ einsetzen, und $\Sigma a_{-n} t^n$ fur $t \to 0$ untersuchen. Da besitzt die Funktion einen Grenzwert, und wenn man also die fur endliche z durch die Reihe $\Sigma a_{-n} \left(\frac{1}{z-a}\right)^n$ dargestellte Funktion fur unendliches z durch diesen Grenzwert erklart, so ist sie auch in ∞ analytisch, wie wir oben schon angaben. Genau wie oben erkennt man, daß die gefundene Reihe von der Wahl des K_2 nicht abhangt und im ganzen Außeren von R_2 konvergiert.

Beide so gefundenen Reihen haben im Kreisring einen gemeinsamen Konvergenzbezirk. Dort ist ihre Summe der analytischen Funktion $f(z)$ gleich.

Es ist auch möglich, die sämtlichen Koeffizienten a_n und a_{-n} durch eine gemeinsame Integralformel darzustellen. Zunachst sieht man, daß die Formel

$$a_\mu = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{K_2 \\ \circlearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{\mu+1}} d\zeta$$

fur negative μ gerade unsere Koeffizienten a_{-n} liefert. Dies Integral sieht also ganz so aus wie das bei der Darstellung der a_n mit positivem n benutzte. Allerdings ist es noch uber einen anderen Kreis als dieses zu erstrecken. Aber es liegt schon im Sinne der obigen Darstellungen, daß es ganz gleichgultig ist, uber welchen den Rand R_2 umschließenden Kreis K die Koeffizientenintegrale erstreckt werden. Und es folgt aus dem Satz S. 131/132, daß der Wert des Integrales

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{K \\ \circlearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

von der Wahl des Kreises K unabhangig ist, wenn nur fur K ein Kreis gewahlt wird, der in positivem Sinne R_2 umschließt. Ja, man kann statt K auch eine andere Kurve um R_2 wahlen. Das ergibt sich unmittelbar aus dem zu Beginn von § 2 S. 130 ausgesprochenen Satze. Denn der Integrand ist im Ringe analytisch und eindeutig.

Wir haben somit restlos den folgenden Satz bewiesen:

$f(z)$ sei in einem von zwei konzentrischen Kreisen R_1 und R_2 mit dem Mittelpunkt a begrenzten Ringbereich eindeutig und analytisch erklart, K sei ein weiterer diesem Ringe angehoriger, sonst beliebiger Kreis mit dem Mittelpunkt a. Es sei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{K \\ \circlearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta.$$

Dann gilt im ganzen Ring die Darstellung

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^n a_n (z-a)^n.$$

2. Pole. Ein wichtiger Spezialfall ergibt sich dann, wenn sich der Rand R_2 auf den Punkt a reduziert, wenn also $f(z)$ im Kreis R_1 eindeutig und analytisch ist mit Ausnahme seines Mittelpunktes a. Wenn insbesondere dann in der Laurentreihe nur endlichviele negative Potenzen vorkommen — und wenn dies der Fall ist, dann reduziert sich ja schon von selbst R_2 auf den Punkt a —, dann sagt man, $f(z)$ habe im Punkte a einen Pol, also es liege dort eine singulare Stelle vor, die man Pol nennt. Insbesondere spricht man von einem Pol n-ter Ordnung, wenn die starkste vorkommende negative Potenz die n-te ist. Die Glieder negativer Potenz

$$a_{-n} \frac{1}{(z-a)^n} + a_{-n+1} \frac{1}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a}$$

machen alle zusammen den *Hauptteil* des Poles aus.

§ 9. Der Cauchysche Koeffizientensatz.

1. Der Koeffizientensatz. *Wenn die Potenzreihe*

$$\mathfrak{P}(z) = \sum_{0}^{\infty} {}^n a_n z^n$$

im Kreise $|z| < R$ *konvergiert*[1]) *und dort eine Funktion darstellt, deren Betrag durchweg kleiner oder gleich* M *ist, dann gilt*

$$|a| \leqq \frac{M}{R^n}.$$

Das ergibt sich sofort aus der Integraldarstellung der Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta.$$

Dabei ist das Integral uber einen mit $|z| = R$ konzentrischen Kreis von kleinerem Radius r zu erstrecken. Daher wird nach S. 108:

$$|a_n| \leqq \frac{M}{r^n}.$$

Da dies aber fur alle $r < R$ gilt, so wird durch Grenzübergang $r \to R$ gefunden, daß auch $|a_n| \leqq \frac{M}{R^n}$.

1) Dieser Kreis kann ein Teilkreis des Konvergenzkreises sein.

2. Prinzip des Maximums. Besonderes Interesse verdient der Fall $n = 0$, also die Abschätzung des Wertes der Funktion im Kreismittelpunkte durch die Randwerte. Da ist also gefunden, daß $|a_0| \leq M$. Wir fragen noch, inwieweit da das Gleichheitszeichen stehen kann. Um das zu sehen, knüpfen wir nochmals an die Darstellung $a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta}$ an. Führen wir hier Polarkoordinaten ein, so wird $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\zeta)\,d\varphi$. Das kann man so aussprechen: *Der Wert einer analytischen Funktion im Mittelpunkt eines Kreises vom Radius $< R$ ist dem arithmetischen Mittel der Randwerte gleich.* Schon daraus wird man vermuten, daß nur dann in der Abschätzung ein Gleich wird stehen können, wenn die Randwerte konstant sind. Aber zum sauberen Nachweis der Richtigkeit dieser Vermutung sind noch ein paar Überlegungen nötig. Zunächst sieht man sofort, daß man das Integral über einen beliebigen Kreis $|z| = r < R$ erstrecken darf. Weiter kann nur dann $|a_0| = M$ sein, wenn am Rande durchweg $|f(\zeta)| = M$ ist. Daher muß auf jedem dieser Kreise der Betrag der Randwert gleich M sein. Also muß im ganzen Kreise die Funktion denselben absoluten Betrag M haben. Daraus folgt, daß sie eine Konstante ist. Denn ihr Logarithmus hat einen konstanten Realteil. Der Realteil des Logarithmus ist nämlich dem Logarithmus des absoluten Betrages gleich. Eine analytische Funktion $\log f(z)$ mit konstantem Realteil ist aber nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen eine Konstante. Hieraus ergibt sich weiter das

Prinzip des Maximums: *Eine in einem abgeschlossenen Bereiche analytische Funktion nimmt das Maximum ihres Betrages nur am Rande an, sofern sie keine Konstante ist.*

Wenn nämlich die Funktion $f(z)$ im Bereiche B analytisch ist, wenn außerdem $|f(z)| \leq M$ im Bereiche B gilt, wenn ferner in dem Bereichpunkt z_0 sogar $|f(z)| = M$ gilt, so muß nach den vorausgegangenen Darlegungen auf jedem dem Bereich angehörigen Kreise um den Punkt z_0 auch $|f(z)| = M$ sein. Es gibt daher einen Teilbereich um den Punkt z_0, in dem $|f(z)| = M$, also nach dem vorausgegangenen $f(z)$ konstant ist. Dann ist aber die Funktion $f(z)$ nach der schon S. 140/141 angestellten Überlegung im ganzen Bereiche konstant.

3. Verschärfung des Koeffizientensatzes. Man kann ähnliche Überlegungen auch bei den übrigen Koeffizienten im Anschluß an die Cauchysche Abschätzung anstellen. Bequemer ist es aber, dabei an eine gewisse einfache Verschärfung des Koeffizientensatzes anzuknüpfen. Sie liefert auch die bisher gefundenen Resultate aufs neue.

Man betrachte dazu das über den Kreis $|z| = r < R$ erstreckte Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^2 d\varphi.$$

Trägt man die im Kreise $|z| < R$ gültige Darstellung

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

ein, so hat man

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} (a_0 + a_1 r e^{i\varphi} + \cdots)(\bar{a}_0 + \bar{a}_1 r e^{-i\varphi} \cdots) d\varphi.$$

Denkt man sich die beiden Reihen ausmultipliziert und integriert, so fallen alle die Glieder heraus, in welchen eine von Null verschiedene Potenz von $e^{i\varphi}$ stehen bleibt. Denn es ist ja für ganzzahliges $m \neq 0$

$$\int_0^{2\pi} e^{mi\varphi} d\varphi = 0.$$

Wenn man dies beachtet, so findet man leicht

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^2 d\varphi = |a_0|^2 + |a_1|^2 r^2 + \cdots + |a_n|^2 r^{2n} + \cdots.$$

Da aber nun $|f(z)| \leqq M$ sein soll, so findet man hieraus

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 r^2 + \cdots + |a_n|^2 r^{2n} + \cdots \leqq M^2.$$

Da dies für alle $r < R$ gilt, so muß auch

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 R^2 + \cdots + |a_n|^2 R^{2n} + \cdots \leqq M^2$$

sein. Namentlich muß also für jedes einzelne Reihenglied

$$|a_n| \leqq \frac{M}{R^n}$$

sein. Soll aber hier das Gleichheitszeichen stehen, so müssen alle anderen Glieder wegfallen, also alle Koeffizienten mit Ausnahme dieses einen a_n verschwinden. Somit haben wir das Ergebnis:

In der Cauchyschen Abschätzung

$$|a_n| \leqq \frac{M}{R^n},$$

wo $|f(z)| \leqq M$ *ist für* $|z| < R$, *steht nur dann das Gleichheitszeichen, wenn*

$$f(z) \equiv \varepsilon \frac{M}{R^n} z^n$$

ist und dabei mit ε *eine Zahl vom Betrage Eins bezeichnet ist.*

Fur $n = 0$ finden wir insbesondere das bisherige Ergebnis wieder.

§ 10. Isolierte Singularitäten eindeutiger analytischer Funktionen.

1. Hebbare Singularitäten. In einem schlichten Bereiche B seien endlichviele Punkte $a_1, a_2 \cdots a_n$ markiert. In allen übrigen Punkten des Bereiches sei $f(z)$ eindeutig und analytisch erklärt. Auch im Bereiche selbst sei $f(z)$ eindeutig. $f(z)$ soll also keine Wertänderung erfahren, wenn z im Bereiche einen geschlossenen Weg beschreibt. Uber das Verhalten von $f(z)$ in den Ausnahmepunkten machen wir erst spater einzelne besondere Annahmen, um so feststellen zu konnen, was aus unseren allgemeinen Annahmen uber das in diesen Ausnahmepunkten $a_\varkappa$ mogliche Verhalten sich ergibt. Wir betrachten eine einzelne derselben: a und legen einen dem Bereiche B angehorigen Kreis K, der nur diese eine Ausnahmestelle enthalten moge, um dieselbe.

Fig. 52

Zunachst werde nun *angenommen, daß die Funktion auch an der Stelle* a *noch stetig* sei. *Wir werden beweisen, daß sie dann an dieser Stelle auch differenzierbar, also analytisch ist.* Um das einzusehen, legen wir um die Stelle a als Mittelpunkt in K einen Kreisring; den außeren Begrenzungskreis K_0 vom Radius r denken wir fest, den inneren K_ϱ vom Radius ϱ werden wir sich andern lassen (Fig. 52). Fur ein dem Kreisring angehoriges z gilt dann die Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\overset{K_r}{\curvearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\overset{K_\varrho}{\curvearrowright}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Der Wert des Integrales $\int\limits_{\overset{K_\varrho}{\curvearrowright}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ ist dabei von der Wahl des Kreises K_ϱ und damit von ϱ unabhängig. Denn solange nur z dem von K_r und K_ϱ be-

grenzten Kreisring angehört, hat die Summe beider Integrale einen unveränderlichen Wert. Daher gilt auch die Gleichung

$$\int_{K_\varrho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \lim_{\varrho \to 0} \int_{K_\varrho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta .$$

Dieser Grenzwert kann aber nun wirklich bestimmt werden. Es wird sich zeigen, daß er Null ist. Da nämlich die Funktion $f(z)$ in dem Kreis K_r stetig ist, so gibt es eine positive Zahl M, so daß für alle z des Kreises K_r und namentlich also auch für alle auf der Kurve K_ϱ gelegenen Stellen die Ungleichung $|f(\zeta)| < M$ richtig wird. Dazu wollen wir noch den Kreis K_ϱ, d. h. seinen Radius ϱ so klein wählen, daß $|\zeta - z| \geqq \frac{|z-a|}{2} = d$ bleibt. z denken wir uns dabei festgehalten und ζ variiert auf dem Kreise K_ϱ. Daher können wir nun abschätzen und finden

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leqq \frac{M}{d}\, \varrho .$$

Da also hiernach das Integral $\int_{K_\varrho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ für genügend kleine ϱ Werte besitzt, die beliebig nahe an Null liegen, und da es andererseits, wie wir sahen, von ϱ unabhängig ist, so muß es verschwinden. Daher gilt nun für alle von $z = a$ verschiedenen Stellen aus dem Kreise K_r die Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Dies Integral stellt aber (S. 133/134) eine auch noch im Punkt $z = a$ analytische Funktion dar, mit der also die gegebene $f(z)$ an allen anderen Stellen übereinstimmt. Da sie aber beide stetig sind, so stimmen sie auch noch an der Stelle $z = a$ selbst überein, und damit haben wir tatsächlich bewiesen, daß $f(z)$ an der Stelle a noch analytisch ist. *Es gibt somit in isolierten Punkten keine Unterbrechung des analytischen Charakters ohne Unterbrechung der Stetigkeit.* Ja, unsere Betrachtungen lassen sogar erkennen, daß diese Stetigkeit eine recht kräftige Unterbrechung erfahren muß, wenn wirklich der analytische Charakter rettungslos verloren gehen soll. Man könnte sich nämlich denken, daß man aus einer an sich bei $z = a$ stetigen Funktion dadurch eine unstetige herstellt, daß man ihr an dieser Stelle einen von ihren Grenzwert abweichenden Wert beilegt. Eine solche Unterbrechung des analytischen Charakters — denn auch die Differenzierbarkeit hört dann auf — kann natürlich sofort behoben werden, indem man nur die Funktion dort wieder richtig erklärt. Solche singulären

Vorkommnisse konnen naturlich auftreten, aber man sieht, daß sie leicht zu beheben sind. Daher nennt man solche Unterbrechungen des analytischen Charakters *hebbare Singularitaten*. Unter einem isolierten *singulären Punkt* einer *eindeutigen* Funktion versteht man dabei allgemein eine Stelle, in deren Umgebung die Funktion analytisch ist, während in diesem Punkt selbst dies *reguläre* Verhalten aufhort. Unter einer regularen Stelle versteht man demnach eine Stelle analytischen Charakters.

Über die hebbaren Unstetigkeiten kann man nun aus den zu Beginn des Paragraphen angestellten Uberlegungen noch ein interessantes Ergebnis gewinnen. Diese Betrachtungen stutzen sich namlich im wesentlichen nur darauf, daß $f(z)$ in der Umgebung von $z = a$ regular und beschrankt ist. Die Stetigkeit in diesem Punkte spielte nur zweimal eine Rolle, einmal als wir auf die Beschränktheit schlossen, die wir jetzt voraussetzen wollen, und dann gegen Schluß, als wir auf die Ubereinstimmung der beiden Funktionen auch im Punkte a schlossen, weil da beide stetig seien. Diese Folgerung fallt jetzt weg. Wohl aber bleibt das Resultat bestehen, daß $f(z)$ an allen von $z = a$ verschiedenen Stellen mit einer auch noch in diesem Punkte analytischen Funktion ubereinstimmt. Demnach also besitzt $f(z)$ auch bei Annaherung an diesen Punkt einen Grenzwert, und indem man aus $f(z)$ dadurch eine andere Funktion macht, daß man sie in dem Punkte $z = a$ diesem Grenzwert gleichsetzt, erhält man aus $f(z)$ eine noch in $z = a$ analytische Funktion. Dann liegt also wieder eine hebbare Singularitat vor.

Ich fasse zusammen.

Ist $f(z)$ in der Umgebung von $z = a$ eindeutig und regular erklart und außerdem beschränkt, so existiert der Grenzwert $\lim\limits_{z\to a} f(z)$. *Bezeichne ich ihn mit A und setze außerdem $f(a) = A$, so ist $f(z)$ auch noch im Punkte a regular analytisch.*

2. Pole. Aus diesem schonen Resultat ziehe ich nun einige Folgerungen. Ich nehme an, $f(z)$ sei in der Umgebung der Stelle $z = a$ nicht mehr beschrankt, wohl aber gebe es eine ganze positive Zahl n derart, daß

$$(z - a)^n f(z)$$

in der Umgebung von $z = a$ beschrankt sei. Dann besitzt diese in dieser Umgebung regulare Funktion für $z \to a$ einen Grenzwert A_0. Erklare ich nun die Funktion $\varphi(z)$ in der Umgebung von $z = a$ durch die Gleichung

$$\varphi(z) = (z - a)^n f(z)$$

und setze außerdem $\varphi(a) = A_0$, so ist $\varphi(z)$ eine auch noch in a analytische Funktion.

$$\varphi(z) = A_0 + A_1(z - a) + \cdots$$

sei ihre Entwicklung nach Potenzen von $z - a$. Daher findet man nun für $f(z)$ in der Umgebung von $z = a$ die Darstellung

$$f(z) = \frac{A_0}{(z-a)^n} + \frac{A_1}{(z-a)^{n-1}} + \cdots A_n + A_{n+1}(z-a) + \cdots.$$

Das ist also eine Laurententwicklung mit nicht mehr als n Gliedern negativer Potenz. Solche sind auch tatsächlich vorhanden, denn sonst wäre, wie ein Blick auf die dann entsprechende Reihenentwicklung zeigt, die Funktion selbst gegen unsere Annahme beschränkt. Die höchste vorkommende negative Potenz sei die m-te. Dann ist also m eine Zahl, die n nicht übertrifft, und unsere Funktion hat an der Stelle $z = a$ im Sinne der S. 49 gegebenen Terminologie einen Pol m-ter Ordnung. So haben wir das folgende Ergebnis gefunden:

Wenn es eine positive Zahl n gibt derart, daß für die in der Umgebung von $z = a$ eindeutige und reguläre Funktion $f(z)$ der Grenzwert $\lim\limits_{z \to a} (z-a)^n f(z)$ *existiert, so gibt es einen kleinsten positiven ganzzahligen Exponenten m, der n nicht übertrifft, und für welchen gleichfalls der Grenzwert existiert, aber von Null verschieden ist. Die Funktion besitzt dann bei $z = a$ einen Pol m-ter Ordnung.*

Auf das Vorhandensein eines solchen Poles kann auch noch aus etwas anderen Voraussetzungen geschlossen werden. Wenn nämlich $f(z)$ nicht beschränkt ist, wohl aber $\frac{1}{f(z)}$ in der Umgebung von $z = a$ beschränkt und regulär ist, so besitzt dann $\frac{1}{f(z)}$ einen bestimmten Grenzwert, der Null sein muß, weil ja $f(z)$ in der Umgebung von $z = a$ beliebig große Werte annimmt. Daher gilt eine Entwicklung von der Form

$$\frac{1}{f(z)} = A_m(z-a)^m + A_{m+2}(z-a)^{m+1} + \cdots \quad (m > 0).$$

Daher gilt für $f(z)$ selbst die folgende Darstellung:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \cdot \frac{1}{A_m + A_{m+1}(z-a) + \cdots}.$$

Da aber hier der zweite Nenner in der Umgebung von $z = a$ nicht verschwindet — für $z = a$ erhält er den von Null verschiedenen Wert A_m und ist außerdem in der Umgebung von $z = a$ stetig, — so gilt für $f(z)$ eine Entwicklung von der Form[1])

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m}\left\{\frac{1}{A_m} + a_1(z-a) + \cdots\right\} = \frac{1}{A_m}\frac{1}{(z-a)^m} + \frac{a_1}{(z-a)^{m-1}} + \cdots$$

Wieder besitzt also $f(z)$ bei $z = a$ einen Pol.

1) Ein bequemes Verfahren zur Berechnung der Koeffizienten $\alpha_\varkappa$ werden wir auf S. 160ff. kennen lernen.

Unsere Annahme, daß $\frac{1}{f(z)}$ regulär und beschränkt sei, bedeutete im Grunde nur, daß $f(z)$ in der Umgebung von $z = a$ dem Werte Null nicht nahe kommen sollte, d. h. daß eine von Null verschiedene positive Zahl m existieren sollte derart, daß $|f(z)| \geqq m > 0$ ist, in der Umgebung von $z = a$. Vorhin war es die Voraussetzung, daß $f(z)$ beschränkt sein, also dem Wert Unendlich nicht nahe kommen sollte. Statt dieser speziellen Werte kann man nun auch einen beliebigen Wert α nehmen. Man kommt so zu dem Ergebnis, *daß eine Funktion* $f(z)$, *welche in der Umgebung von* $z = a$ *eindeutig und regulär ist, und die in dieser Umgebung einem beliebigen Werte* α *nicht nahe kommt, bei passender Erklärung in* $z = a$ *entweder bei* $z = a$ *noch regulär ist oder dort einen Pol besitzt.*

Wenn nämlich $|f(z) - \alpha| \geqq m > 0$ bleibt, so ist $\left|\frac{1}{f(z) - \alpha}\right| \leqq \frac{1}{m}$. Daher ist $\frac{1}{f(z) - \alpha} = a_0 + a_1(z - a) + \cdots$ regulär und daher wird

$$f(z) = \alpha + \frac{1}{a_0 + a_1(z - a) + \cdots},$$

hat also bei $z = a$ entweder ($a_0 = 0$) einen Pol, oder ($a_0 \neq 0$) ist sogar regulär.

3. Wesentlich singuläre Stellen. Alle die eben besprochenen Singularitäten faßt man als *außerwesentliche* zusammen. Ihnen stehen die *wesentlich singulären Stellen* gegenüber. In ihrer Umgebung muß also die Funktion $f(z)$ einem jeden Werte beliebig nahe kommen. Dahin gehört z. B. für die Exponentialfunktion, welche ja im Endlichen überall regulär ist, der unendlichferne Punkt. Denn in jedem Periodenstreifen kommt die Exponentialfunktion einem jeden Werte nahe, ja, sie nimmt sogar jeden Wert außer Null und Unendlich wirklich in jedem Streifen an. Derartige Streifen haben aber in jeder Umgebung des unendlichfernen Punktes in unendlicher Anzahl Platz.

Daß in der Umgebung der wesentlich singulären Stellen die analytischen Funktionen nicht nur jedem Werte nahe kommen, sondern sogar jeden Wert mit höchstens einer Ausnahme wirklich annehmen, ist der Inhalt des *Picardschen Satzes*, den wir erst im zweiten Bande näher betrachten werden.

Man kann indessen leicht einsehen, *daß eine analytische Funktion* $w = f(z)$ *in jeder Umgebung* $|z - z_0| < r$ *einer wesentlich singulären Stelle* $z = z_0$ *einzelne Werte unendlich oft annimmt.* Es gibt sogar in beliebiger Nähe einer jeden Zahl a Werte b, die unendlichoft angenommen werden. Sei nämlich b ein von $f(z)$ angenommener Wert, der sich um weniger als das beliebig gegebene ε von a unterscheiden möge. Sei etwa $f(\beta) = b$. Dann nimmt nach einem S. 192 erst zu beweisenden Satz $f(z)$ in der Umgebung von β alle Werte aus einer gewissen Umgebung von b an. Es mögen etwa alle Werte aus dem Kreise K_1: $|w - b| < \eta$ angenommen werden. Alsdann betrachte ich die Umgebung $|z - z_0| < \frac{r}{2}$. In

ihr gibt es eine Stelle, an der ein Wert aus K_1 angenommen wird. Daher werden in $|z - z_0| < \frac{r}{2}$ alle Werte eines gewissen Teilkreises K_2 von K_1 angenommen. Dann betrachte ich $|z - z_0| < \frac{r}{4}$ und erkenne, daß hier wieder die Werte eines gewissen Teilkreises K_3 von K_2 mindestens einmal angenommen werden. So erhalt man eine unendliche Folge ineinanderliegender Kreise der w-Ebene. Jeder Punkt, der samtlichen Kreisen angehort, wird in beliebiger Nahe von $z = z_0$ unendlichoft angenommen.

4. Der Liouvillesche Satz. Daß eine jede nichtkonstante analytische Funktion singulare Stellen — sei es wesentliche oder nur außerwesentliche (Pole) — besitzen muß, ist der Inhalt *des Liouvilleschen Satzes.*

Von hebbaren Singularitaten werde dabei gleich ganz abgesehen; wir wollen die Existenz von Polen oder wesentlich singularen Stellen nachweisen. *Ich nehme also an, eine Funktion $f(z)$ sei in der ganzen Ebene, also auch im Unendlichfernen regular.*[1] *Ich werde beweisen, daß sie dann eine Konstante sein muß.* Bevor ich in den Beweis eintrete, erinnere ich daran, daß eine solche Funktion beschrankt ist. Es sei also etwa $|f(z)| \leqq M$. Ich werde nun zeigen, daß an jeder endlichen Stelle die Ableitung verschwinden muß. Zu dem Zweck schlage ich um die zu untersuchende Stelle z als Mittelpunkt einen Kreis vom Radius R und wende auf die in ihm regulare Funktion den Cauchyschen Koeffizientensatz an. Der liefert

$$|f'(z)| \leqq \frac{M}{R}$$

Diese Abschatzung muß aber nun fur beliebige R gelten. Daher kann nur $f'(z) = 0$ sein.

5. Rationale Funktionen. Ich will nun weiter annehmen, es sei eine bis auf Pole in der vollen Ebene regulare eindeutige Funktion vorgelegt. Dann konnen diese Pole nur in endlicher Anzahl auftreten. Denn ein Haufungspunkt derselben kann weder eine regulare Stelle noch ein Pol sein. *Denn Pole sind isolierte Singularitaten.* Ihre Laurententwicklung hat namlich nur endlichviele negative Potenzen, konvergiert also in der Umgebung des Poles, so daß dort uberall $f(z)$ regulär ist (S. 37). Es seien nun $a_1, a_2 \cdots a_n$ und eventuell ∞ die Pole. Die Glieder negativer Potenz in den zugehorigen Laurententwicklungen[2]) seien

1) Ich erinnere daran, was unter einer im Unendlichfernen analytischen Funktion zu verstehen ist $f(z)$ heißt fur $z = \infty$ analytisch, wenn $f\left(\frac{1}{t}\right)$ bei $t = 0$ analytisch ist.

2) Bei $z = \infty$ hat man ja alle Funktionen nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ zu entwickeln. Negative Potenzen von $\frac{1}{z}$ sind aber positive Potenzen von z.

$$\frac{A_0^{(\varkappa)}}{(z-a_\varkappa)^{n_\varkappa}} + \frac{A_1^{(\varkappa)}}{(z-a_\varkappa)^{n_\varkappa-1}} + \cdots + \frac{A_{n_\varkappa-1}^{(\varkappa)}}{z-a_\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

und
$$A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_{n-1} z.$$

Bildet man nun die Summe aller dieser rationalen Funktionen, so erhält man eine Funktion $\varphi(z)$, die dieselben Pole wie $f(z)$ besitzt. Die Differenz beider ist aber von Polen frei. Denn an jeder Stelle stimmen die Laurententwicklungen beider in den Gliedern negativer Potenzen überein. Die Differenz $f(z) - \varphi(z)$ ist somit durchweg regulär. Daher ist nach dem Liouvilleschen Satze die Differenz eine Konstante. So haben wir den folgenden Satz gefunden:

Die rationalen Funktionen sind die einzigen in der ganzen Ebene bis auf Pole regulären Funktionen.

Daß aber die rationalen Funktionen selbst durchweg bis auf Pole regulär sind, leuchtet leicht ein. Denn an einer Stelle, wo der Nenner von

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}$$

nicht verschwindet, ist der Quotient regulär.[1]) Verschwindet aber der Nenner — wir dürfen natürlich annehmen, daß nicht auch der Zähler verschwindet, weil wir sonst kürzen könnten —, so wird etwa

$$b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m = \beta_\varkappa (z-a)^\varkappa + \cdots \quad (\beta_\varkappa \neq 0).$$

Also
$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{(z-a)^\varkappa}\left(\frac{1}{\beta_\varkappa} + \gamma_1(z-a) + \cdots\right)$$

Multipliziert man noch mit $p(z) = \alpha_0 + \alpha_1(z-a) + \cdots + \alpha_n(z-a)^n$, so findet man etwa

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{1}{(z-a)^\varkappa}\left\{\delta_0 + \delta_1(z-a) + \cdots\right\},$$

und führt man nun die Division mit $(z-a)^\varkappa$ aus, so wird

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\delta_0}{(z-a)^\varkappa} + \frac{\delta_1}{(z-a)^{\varkappa-1}} + \cdots$$

Also liegt ein Pol vor. Was aber endlich das Unendlichferne anlangt, so hat man ja nur

$$\frac{p\left(\frac{1}{t}\right)}{q\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{t^m}{t^n} \cdot \frac{a_0 t^n + \cdots + a_n}{b_0 t^m + \cdots + b_m}$$

1) Wie im Reellen ist nach S. 33 der Quotient überall da differenzierbar, wo der Nenner nicht verschwindet.

bei $t = 0$ zu betrachten. Das hat dort einen Pol $n - m$-ter Ordnung, wenn $n > m$ ist, und ist sonst regular. Im Unendlichfernen hat also $f(z)$ einen Pol oder ist dort regulär, je nachdem der Zählergrad den Nennergrad ubertrifft oder nicht. Wegen dieser Sachverhalte nennt man die Pole zusammen mit den regulären Stellen auch *Stellen rationalen Charakters*. Die regulären Stellen heißen insbesondere Stellen von ganzem rationalen Charakter.

6. Fundamentalsatz der Algebra. Eine weitere Anwendung des Liouvilleschen Satzes moge nun folgen. Das ist der Beweis des *Fundamentalsatzes der Algebra*, des Satzes also, daß eine jede nicht konstante, ganze rationale Funktion $g(z)$ Nullstellen besitzt. Anderenfalls nämlich ware auch $f(z) = \frac{1}{g(z)}$ an jeder endlichen Stelle der Ebene analytisch. Dazu ware diese Funktion aber auch beschrankt. Denn wenn $g(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, ist, so wird

$$f(z) = \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{a_n + a_{n-1}\frac{1}{z} + \cdots + a_0 \frac{1}{z^n}}.$$

Daher wird $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = 0$. Außerhalb eines genugend großen Kreises K ist also $|f(z)| < \varepsilon$ und im Inneren ist $|f(z)|$ stetig, also auch beschrankt. Daher ist nach dem Liouvilleschen Satze $f(z)$ eine Konstante. Daher muß $g(z) = a_0$ sein, gegen die Annahme, daß $g(z)$ sich mit z andern solle.

7. Schlichte Abbildungen. Aus dem Satze, daß jede eindeutige Funktion von durchweg rationalem Charakter rational ist, moge nun noch diese Folgerung gezogen werden:

Jede durchweg eindeutige schlichte und bis auf endlichviele Ausnahmestellen regular analytische Abbildung der komplexen Ebene wird durch eine lineare Funktion vermittelt.

Die Funktion darf also jeden Wert nur hochstens einmal annehmen, sonst wäre die Abbildung nicht schlicht. Daher hat sie nach S. 152 keine wesentlich singulare Stelle, ist also nach dem eben erwahnten Satze rational. Da sie aber jeden Wert nur einmal annimmt, so muß sie linear sein.

Aufgabe. Wenn eine Funktion in der Umgebung einer isolierten singularen Stelle eindeutig ist, wenn aber dort weder sie selbst noch ihr Reziprokes beschrankt ist, so liegt eine wesentlich singulare Stelle vor.

§ 11. Der Weierstraßsche Doppelreihensatz.

1. Der Satz. Der Satz handelt von den Reihen analytischer Funktionen. *In einem Bereiche B seien die Funktionen $f_1(z)$, $f_2(z) \ldots f_n(z) \ldots$ eindeutig und regular analytisch erklärt. Die Reihe $f(z) = f_1(z) + f_2(z) \ldots$ möge in B*

gleichmäßig konvergieren. Wir wissen bereits, daß die Summe $f(z)$ eine in B eindeutige und stetige Funktion ist. Jetzt wollen wir überdies beweisen, daß sie analytisch ist. Im Sinne unserer Definition der analytischen Funktionen bedeutet dies, daß $f(z)$ differenzierbar ist. *Wir werden gleichzeitig sehen, daß die Ableitung der Summe gleich der Summe der Ableitungen der Reihenglieder ist und daß diese Reihe selbst wieder in jeder abgeschlossenen Teilmenge von B gleichmäßig konvergiert.*

Im Reellen hat man bekanntlich die gleichmäßige Konvergenz der Reihe der Ableitungen oder eine ähnliche Voraussetzung nötig, um auch nur die Differenzierbarkeit der Summe einer Reihe differenzierbarer Funktionen erkennen zu können. Ohne eine solche weitere Voraussetzung braucht dort die Summe gar nicht differenzierbar zu sein. (Siehe z. B. meinen Leitfaden der Integralrechnung, 3. Aufl., S. 73.) Hier dagegen läßt sich das alles ohne weitere Voraussetzung aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{i=1,2} f_i(z)$ allein erschließen.

Seinen Namen „Doppelreihensatz“ trägt dieser Satz daher, daß für seinen Entdecker Weierstraß, wie wir schon S. 142 darlegten, die analytischen Funktionen durch die Möglichkeit der Potenzreihenentwicklung erklärt waren; so war für Weierstraß jedes Reihenglied $f_i(z)$ selbst eine Potenzreihe, und es handelte sich darum, die Potenzreihenentwicklung der Summe als möglich zu erkennen und sie zu finden. Auch hiervon wird nachher näher die Rede sein.

2. Beweis. Die Cauchysche Integralformel liefert recht bequem einen Beweis des Satzes. Betrachten wir nämlich das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Es werde über eine geschlossene, den Punkt z einmal im positiven Sinn umschließende Kurve $\mathfrak{C}$ aus B erstreckt. Trägt man hier den Wert von $f(z)$ ein, so erhält man

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int d\zeta \left\{\frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z} + \cdots\right\}.$$

Da aber nun die Summe $f_1(\zeta) + f_2(\zeta) \cdots$ für alle der Kurve $\mathfrak{C}$ angehörigen ζ und festes z gleichmäßig konvergiert, so wird weiter

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \cdots.$$

Wertet man aber die einzelnen Integrale aus, so findet man

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f_1(z) + f_2(z) + \cdots = f(z).$$

Da aber nun nach S. 134 das Integral $\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$ eine analytische Funktion von z darstellt, so ist $f(z)$ eine analytische Funktion.

Bemerkung. Statt sich der Integralformel zu bedienen, hätte man auch das Integral $\int f(\zeta)\,d\zeta$ selbst betrachten können, um, gestützt auf den Moreraschen Satz von S. 136 den analytischen Charakter von $f(z)$ zu erkennen.

Unser Gedankengang bietet uns aber noch mehr. Er läßt uns auch erkennen, daß

$$f'(z) = f'_1(z) + f'_2(z) + \cdot$$

und daß diese Reihe in jeder abgeschlossenen Teilmenge des Bereiches B wieder gleichmäßig konvergiert. Es wird nämlich

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int d\zeta\left\{\frac{f_1(\zeta)}{(\zeta-z)^2}+\frac{f_2(\zeta)}{(\zeta-z)^2}+\cdots\right\}$$
$$= f'_1(z) + f'_2(z) + \cdots.$$

Die gleichmäßige Konvergenz der Reihe leuchtet so ein: Sei

$$r'_n(z) = f'_n(z) + f'_{n+1}(z) + \cdots$$

der Rest der Reihe, so kann ich

$$r'_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{d\zeta}{(\zeta-z)^2}\{f_n(\zeta)+f_{n-1}(\zeta)+\cdot\quad\}$$

setzen. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe

$$f_1(z) + f_2(z) +$$

gibt es zu jedem $\varepsilon > o$ ein $N(\varepsilon)$, so daß für $n > N(\varepsilon)$

$$|f_n(\zeta) + f_{n+1}(\zeta)\cdot\quad\cdot + | < \varepsilon$$

wird. Beschränkt man nun z auf eine Kreisscheibe vom Radius r und integriert über den Rand einer konzentrischen Kreisscheibe von einem um eine Zahl ϱ größeren Radius, so wird $|\zeta - z| \geqq \varrho$ und

$$|r'_n(z)| < \frac{\varepsilon r}{\varrho^2}.$$

Es gibt also um jede Stelle des Bereiches B eine Kreisscheibe, in der $\sum f'_\nu(z)$ gleichmäßig konvergiert. Da man nach dem *Heine-Borelschen* Satz (vgl. S. 86 Fußnote) jede abgeschlossene Teilmenge von B mit endlichvielen solcher Kreisscheiben bedecken kann, so konvergiert $\sum f'_\nu(z)$ gleichmäßig in jeder

solchen abgeschlossenen Teilmenge. Die Wiederholung des Schlusses liefert $f''(z) = \sum f''_\varkappa(z)$, und auch diese Reihe konvergiert gleichmäßig usw.

3. Potenzreihenentwicklung der Summe. Wir konnen nun auch leicht die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ gewinnen. Diese sind nämlich bis auf die Nenner $n!$ die Ableitungen der Funktion $f(z)$ im Mittelpunkt der Entwicklung. Diese Ableitungen aber sind als Summen der entsprechenden Ableitungen der Reihenglieder erkannt. Daher wird nun auch der Koeffizient der n-ten Potenz in der Entwicklung

$$f(z) = \mathfrak{P}(z-a) = \sum a_n (z-a)^n$$

der Summe der Koeffizienten der n-ten Potenzen in den Entwicklungen

$$f_\varkappa(z) = \mathfrak{P}_\varkappa(z-a) = \sum a_n^{(\varkappa)} (z-a)^n$$

gleich. Daher findet man die Summe der Potenzreihen

$$\sum_{\varkappa=1,2} \mathfrak{P}_\varkappa(z-a)$$

dadurch, daß man die mit gleicher Potenz von $(z-a)$ behafteten Glieder aller Reihen zusammenzahlt und dann die so erhaltenen Summen zu einer Reihe vereinigt. Ich will dies noch als besonderen Satz aussprechen:

Die Reihen $$f_\varkappa(z) = \mathfrak{P}_\varkappa(z-a) = \sum_{n=1,2,} a_n^{(\varkappa)} (z-a)^n$$

mögen alle in dem Kreise $|z-a| < r$ *konvergieren. Außerdem konvergiere die Reihe*

$$\sum_{\varkappa=1,2} f_\varkappa(z) = f(z)$$

in diesem Kreise gleichmäßig. Dann ist

$$f(z) = \mathfrak{P}(z-a) = \sum_{n=1,2,} a_n (z-a)^n,$$

und hier ist $$a_n = \sum_{\varkappa=1,2,} a_n^{(\varkappa)}.$$

4. Anwendungen. Insbesondere kann aus dem Doppelreihensatz die auch aus der Kettenregel von S. 33 folgende *Gruppeneigenschaft der analytischen Funktionen* erschlossen werden. Darunter versteht man die Tatsache, daß $f(w)$ eine analytische Funktion von z ist, wenn $f(w)$ in w analytisch ist und w selbst als analytische Funktion $w = \varphi(z)$ erklart ist.

Die präzise Fassung dieser Aussage uber mittelbare Funktionen wird durch den folgenden Satz gegeben:

$w = \varphi(z)$ sei in der Umgebung von $z = a$ eindeutig und analytisch. Ferner sei $\varphi(a) = b$, und es sei $f(w)$ in der Umgebung von $w = b$ analytisch und eindeutig. Dann ist $f\{w(z)\}$ in der Umgebung von $z = a$ analytisch.

Wegen der Stetigkeit von $\varphi(z)$ kann man nämlich einen Kreis um $z = a$ abgrenzen, in welchem $\varphi(z)$ nur Werte annimmt, die dem Konvergenzkreis von $f(w) = \sum \beta_\nu (w-b)^\nu$ angehoren. Setzt man dann

$$f_\varkappa(z) = \beta_\varkappa \{\varphi(z) - b\}^\varkappa,$$

so sind die Voraussetzungen des Doppelreihensatzes erfullt. Daher folgt aus ihm sofort unser Satz uber mittelbare Funktionen.

Aus diesem Satz fließt nun auch sofort wieder die Kettenregel der Differentialrechnung. Denn wir haben ja die Entwicklung

$$f\{w(z)\} = \sum \beta_\nu \{\varphi(z) - b\}^\nu.$$

Da man Potenzreihen gliedweise differenzieren kann, so ergibt sich

$$\frac{df\{w(z)\}}{dz} = \sum \nu\beta_\nu \{\varphi(z) - b\}^{\nu-1} \cdot \varphi'(z) = \frac{df}{dw} \cdot \frac{dw}{dz}.$$

Das ist aber die Kettenregel der Differentialrechnung, die wir schon S. 34 auf anderem Wege bewiesen haben. Bei der Herleitung haben wir allerdings ihre Gultigkeit fur die Differentiation der Potenz $(\varphi(z) - b)^\nu$ vorausgesetzt. Das konnte auch unbesorgt geschehen, weil sie hier eine Folge der Regel uber die Differentiation eines Produktes ist.

Es gibt n verschiedene in der Umgebung von $z = 0$ eindeutige und analytische Funktionen $f(z)$, deren n-te Potenz (n positiv ganzzahlig) mit $1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ übereinstimmt. Sie werden mit

$$\sqrt[n]{1 + a_1 z + \cdots}$$

bezeichnet. Der Quotient je zweier derselben ist eine n-te Einheitswurzel. Denn

$$\sqrt[n]{\zeta}$$

erklart in jedem schlichten Bereich der z-Ebene, welcher $\zeta = 0$ nicht enthält, nach S. 67 n eindeutige analytische Funktionen, die sich um Einheitswurzeln als Faktoren unterscheiden. Da aber

$$\zeta = 1 + a_1 z + \cdots$$

in der Umgebung von $z = 0$ analytisch und von Null verschieden ist, so zerfällt nach dem eben Bewiesenen

$$\sqrt[n]{1 + a_1 z + \cdots}$$

in der Umgebung von $z = 0$ in n eindeutige analytische Funktionen.

§ 12. Die Technik der Potenzreihenentwicklung.

1. Beispiel. Handelt es sich z. B. darum, die Funktion

$$\frac{1}{(z^2-1)(z-2)} \tag{1}$$

nach Potenzen von z zu entwickeln, so wäre es unbequem, dazu die Koeffizienten durch die Ableitungen der Funktion auszudrücken. Bequemer ist es schon, jeden einzelnen der Faktoren

$$\frac{1}{z-1}, \quad \frac{1}{z+1}, \quad \frac{1}{z-2}$$

zu entwickeln und dann das Produkt der gefundenen Reihen zu bilden. Am allerbesten aber ist es, erst die Funktion in Partialbrüche zu zerlegen und dann die gefundenen Einzelbrüche zu entwickeln. Setzt man an

$$\frac{1}{(z^2-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z-2}, \tag{2}$$

so findet man leicht den Koeffizienten A, indem man mit $(z-1)$ multipliziert und dann $z = 1$ setzt. So wird $A = -\frac{1}{2}$. Ebenso findet man $B = \frac{1}{6}$, $C = \frac{1}{3}$. Nun wird weiter

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots \tag{3a}$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \tag{3b}$$

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} + \cdots \tag{3c}$$

Daher hat man

$$\frac{1}{(z^2-1)(z-2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{2^3}\right)z^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{2^4}\right)z^3 + \cdots \tag{4}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{3}\cdot\frac{2^4-1}{2^3}\,z^2 + \frac{1}{3}\,\frac{2^4-1}{2^4}\,z^3 + \cdots.$$

2. Rationale Funktionen. Nach dem Muster dieses Beispiels geht man zweckmäßig bei der Entwicklung rationaler Funktionen vor, falls die Nullstellen des Nenners leicht zugänglich sind. Für kompliziertere Fälle empfiehlt sich die Methode der unbestimmten Koeffizienten, die wir bald kennenlernen werden.

Es können Partialbrüche von der Form $\frac{1}{(z-a)^n}$ mit einem Exponenten n vorkommen, welcher die Eins übertrifft. Schreibt man wieder

$$\frac{1}{(z-a)^n} = \frac{1}{(-a)^n}\,\frac{1}{\left(1-\frac{z}{a}\right)^n},$$

so erkennt man, daß es darauf ankommt, die Entwicklung von

$$\frac{1}{(1-z)^n}$$

nach Potenzen von z zu beherrschen. Man kann versuchen, diese dadurch zu gewinnen, daß man

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$$

n-mal mit sich selbst multipliziert.

Hat man allgemein eine Potenzreihe

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

mit

$$1 + z + z^2 + \cdots$$

zu multiplizieren, so erkennt man, daß in der Produktreihe der Koeffizient von z^n der n-ten Partialsumme s_n der Koeffizienten a_x gleich wird: $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.

Wendet man dies auf den vorliegenden Fall an, in dem es sich darum handelt, allgemein gesprochen $\frac{1}{(1-z)^{n-1}}$ mit $\frac{1}{1-z}$ zu multiplizieren, so findet man zunächst

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + (n+1)z^n + \cdots. \tag{5}$$

Alsdann

$$\frac{1}{(1-z)^3} = 1 + 3z + 6z^2 + \cdots + \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^n + \cdots. \tag{6}$$

Um $\frac{1}{(1-z)^4}$ zu bekommen, muß man schon die Summe

$$1 + 3 + 6 + \cdots \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

berechnen können. Das läuft im wesentlichen darauf hinaus,

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \tag{7}$$

auszurechnen. Das sind Aufgaben, welche die Kombinatorik direkt zu lösen lehrt. Es ist aber einfacher, zur Herstellung der gewünschten Reihenentwick-

lungen den binomischen Lehrsatz zu verwenden. Dann erhält man gleichzeitig eine elegante Lösung der eben berührten Summationsaufgaben.

3. Der binomische Satz. Was nun den *binomischen Satz* anlangt, so kann er ohne weiteres aus dem reellen Gebiet übertragen werden. Denn

$$\frac{1}{(1-z)^n}$$

ist für alle von $z = 1$ verschiedenen Stellen der z-Ebene eine eindeutige reguläre Funktion. Sie kann daher für $|z| < 1$ nach Potenzen von z entwickelt werden. Die Koeffizientenbestimmung der Taylorschen Reihen lehrt, daß in

$$\frac{1}{(1-z)^n} = s_0^{(n)} + s_1^{(n)} z + \cdots + s_\varkappa^{(n)} z^\varkappa + \cdots$$

der Koeffizient $s_\varkappa^{(n)}$ den Wert $\frac{1}{\varkappa!} \frac{d^\varkappa (1-z)^{-n}}{dz^\varkappa} \Big/_{z=0}$ hat. Die Ausrechnung liefert

$$s_\varkappa^{(n)} = \frac{n(n+1)\cdots(n+\varkappa-1)}{1\cdot 2 \cdots \varkappa} \tag{8}$$

$$= (-1)^\varkappa \frac{(-n)}{1}\frac{(-n-1)}{2}\frac{(-n-2)}{3}\cdots\frac{(-n-\varkappa+1)}{\varkappa} = (-1)^\varkappa \binom{-n}{\varkappa}.$$

Definiert man für beliebige Exponenten r

$$(1+z)^r = e^{r \log(1+z)}, \tag{9}$$

so erkennt man durch ähnliche Schlüsse, daß der binomische Satz auch auf Potenzen $(1+z)^r$ mit beliebigem reellen oder imaginären r ausgedehnt werden kann, und daß alle Entwicklungen den Einheitskreis zum Konvergenzkreis haben. Denn die Darstellung (9) lehrt, daß $(1+z)^r$ auf der Riemannschen Fläche des $\log(1+z)$ eine eindeutige Funktion ist. Jedenfalls also ist jeder ihrer Zweige im Einheitskreis eindeutig und regulär und kann somit nach S. 139 nach Potenzen von z entwickelt werden. Aus den vorhin dargelegten Gründen wird die Entwicklung durch den binomischen Satz geleistet.

4. Konvergenzkreise. Ich ergänze meine Bemerkungen über die Entwicklung der rationalen Funktionen durch einige Worte über die Konvergenzkreise der Reihen. Kehren wir zu der Funktion (1) zurück. Die drei Reihen (3) haben als Konvergenzkreise den Einheitskreis bzw. den Kreis $|z| < 2$. Daher ist der Konvergenzkreis der Reihe der Einheitskreis. Beachtet man nämlich, daß Eins die Entfernung des nächsten Poles der Funktion (1) vom Nullpunkt ist, so erkennt man darin eine Bestätigung der allgemeinen Regel, die man schon den Erörterungen der S. 139 entnehmen kann. Dort nämlich erkannten wir, daß der Konvergenzkreis immer der größte Kreis um den Ent-

wicklungsmittelpunkt ist, welcher in dem Regularitätsbereich der Funktion Platz hat. Beachtet man aber, daß rationale Funktionen in der ganzen Ebene bis auf Pole regulär sind, so erkennt man, daß man bei ihnen die volle, von den Polstellen allein begrenzte Ebene als Regularitätsbereich nehmen kann, daher ist der Konvergenzradius einer jeden Entwicklung der Entfernung des nächsten Poles vom Entwicklungsmittelpunkt gleich. Das gilt auch für die Laurententwicklung in der Umgebung einer Polstelle.

Die gleiche Betrachtung lehrt auch den Konvergenzkreis der Entwicklung von $\varphi(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\mathfrak{P}_1(z)}{\mathfrak{P}_2(z)}$ erkennen. Dabei sollen

$$\mathfrak{P}_1(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$$

und

$$\mathfrak{P}_2(z) = b_0 + b_1 z + \cdots$$

zwei für $|z| < r$ reguläre Funktionen sein. Wenn namentlich der Nenner bei $z = 0$ nicht verschwindet, so erhält man eine Potenzreihenentwicklung von $\varphi(z)$, die in einer gewissen Umgebung von $z = 0$ konvergiert. Ist nämlich für das ganze Gebiet $|z| < r$ der Nenner von Null verschieden, so konvergiert auch die neue Reihe für $|z| < r$. Anderenfalls wird ihr Konvergenzradius durch die Entfernung der nächsten Nullstelle des Nenners vom Mittelpunkt der Entwicklung bestimmt. Hat aber der Nenner bei $z = 0$ eine Nullstelle n-ter Ordnung, so besitzt dort $\frac{1}{g(z)}$ einen Pol n-ter Ordnung. Um seine Laurentreihe zu finden, betrachtet man erst das noch bei $z = 0$ reguläre $\frac{z^n}{g(z)}$ und dividiert die dafür gefundene Reihe durch z^n.

Wir haben also nur die Aufgabe zu lösen, eine bei $z = 0$ reguläre Funktion $\frac{f(z)}{g(z)}$ nach Potenzen von z zu entwickeln. Handelt es sich nur darum, einige Anfangskooffizienten zu finden, so geht man zweckmäßig so vor, daß man erst $\frac{1}{g(z)}$ entwickelt und dann mit $f(z)$ multipliziert.

5. Der Tangens. Am Beispiel von $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ möge das dargelegt werden. Da der Nenner nur für ungerade Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ verschwindet, wird der Konvergenzradius der Entwicklung $\frac{\pi}{2}$. Nun hat man aber

$$\frac{1}{\cos z} = \frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4!} \cdots\right)}.$$

Setzt man abkürzend

$$\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4!} \cdots = \zeta,$$

so hat man $\zeta = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4!} + \cdots$ in die geometrische Reihe

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots$$

einzutragen. Das ist ein ganz spezieller Fall des Weierstraßschen Doppelreihensatzes. Denn für genügend kleine $|z|$ wird $|\zeta| < 1$. Die Reihenglieder $f_n(z)$ sind gerade die Potenzen $\zeta^n = \left(\frac{z^2}{2} - \cdots\right)^n$. Nun findet man aber

$$\zeta^2 = \frac{z^4}{4} - \frac{z^6}{4!} \quad + \cdots$$

$$\zeta^3 = \frac{z^6}{8} - \frac{3}{4}\frac{z^8}{4!} + \cdots.$$

Also wird
$$\frac{1}{\cos z} = 1 + \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} \quad + \cdots + \frac{z^4}{4} - \frac{z^6}{4!} \quad + \cdots + \cdots = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{5}{24} z^4 \ldots + \frac{1}{8} z^6 + \cdots$$

Multipliziert man nun noch mit

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} \cdots, \qquad \text{so erhält man}$$

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \cdots. \tag{10}$$

Ebenso kann man den ctg z behandeln. Es bietet aber hier ein besonderes Interesse, zu einer allgemeinen Formel für die Koeffizienten der Reihe vorzudringen. Zunächst verschwindet ja in

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

der Nenner für alle Vielfachen von π. An jeder dieser Stellen hat ctg z einen einfachen Pol. Bei $z = 0$ ist ja z. B.

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \cdots}{z\left(1 - \frac{z^2}{3!} \cdots\right)} = \frac{1}{z} + \mathfrak{P}(z).$$

6. Der Quotient zweier Potenzreihen. Wir wenden uns zur allgemeinen Bestimmung der Koeffizienten bei einem Quotienten

$$\frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots}, \quad (b_0 \neq 0)$$

um das gefundene Resultat dann auf z ctg z anzuwenden.

Da wir bereits wissen, daß eine Entwicklung der Form

$$\zeta_0 + \zeta_1 z + \cdots$$

existieren muß, so können wir zunächst mit unbestimmten Koeffizienten ansetzen

$$\frac{a_0 + a_1 z + \cdots}{b_0 + b_1 z + \cdots} = \zeta_0 + \zeta_1 z + \cdots$$

und hier die ζ_n als zu bestimmende Koeffizienten ansehen. Multipliziert man dann rechts und links mit $b_0 + b_1 z + \cdots$, so liefert die Vergleichung der Koeffizienten gleicher Potenzen von z auf der rechten und linken Seite zur Bestimmung von $\zeta_0, \zeta_1, \cdots \zeta_n$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\zeta_n b_0 + \zeta_{n-1} b_1 + \cdots + \zeta_0 b_n &= a_n \\
\zeta_{n-1} b_0 + \cdots + \zeta_0 b_{n-1} &= a_{n-1} \\
&\cdot \\
\zeta_1 b_0 + \zeta_0 b_1 &= a_1 \\
\zeta_0 b_0 &= a_0.
\end{aligned}$$

Daraus entnimmt man

$$(11) \qquad \zeta_0 = \frac{a_0}{b_0}, \quad \zeta_n = \frac{(-1)^n}{b_0^{n+1}} \begin{vmatrix} b_1 b_2 b_3 & \cdot & b_n & a_n \\ b_0 b_1 b_2 & \cdot & b_{n-1} & a_{n-1} \\ 0\ b_0 b_1 & \cdots & b_{n-2} & a_{n-2} \\ 0\ 0\ b_0 & \cdot & b_{n-3} & a_{n-3} \\ 0\ 0\ 0 & & b_0 & a_0 \end{vmatrix}, \quad (n > 0).$$

7. Der Cotangens. Wenden wir dies Ergebnis nun auf die Entwicklung von $z \operatorname{ctg} z$ an. Da in

$$z \operatorname{ctg} z = \frac{1 - z^2 \frac{1}{2!} + \cdots}{1 - z^2 \cdot \frac{1}{3!} + \cdots}$$

nur gerade Potenzen von z vorkommen, so enthält auch die Potenzreihenentwicklung von $z \operatorname{ctg} z$ nur gerade Potenzen. Ich kann daher

$$z \operatorname{ctg} z = 1 + \zeta_1 z^2 + \zeta_2 z^4 + \cdots + \zeta_n z^{2n} + \cdots$$

ansetzen. Schreibe ich hier $\zeta = z^2$, so habe ich also den Ansatz

$$\frac{1-\frac{\zeta}{2!}+\cdots}{1-\frac{\zeta}{3!}+\cdots} = 1 + \zeta_1\zeta + \zeta_2\zeta^2 + \cdots.$$

In der allgemeinen Formel ist daher $a_n = (-1)^n \frac{1}{(2n)!}$ und $b_n = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}$ zu setzen. Daher findet man

$$\zeta_n = (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{-1}{3!} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{7!} & \cdot & \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} & \frac{(-1)^n}{(2n)!} \\ 1 & \frac{-1}{3!} & \frac{1}{5!} & \cdot\cdot & \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} & \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3!} & \cdot\cdot & \frac{(-1)^{n-2}}{(2n-3)!} & \frac{(-1)^{n-2}}{(2n-4)!} \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdot\cdot & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Hieraus findet man z.B. $\zeta_1 = -\begin{vmatrix} -\frac{1}{3!} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$

$$\zeta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{4!} \\ 1 & -\frac{1}{3!} & -\frac{1}{2!} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{90} \quad \text{usw}$$

So wird also

(12) $$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{2}{90}z^3 \cdots + \zeta_n z^{2n-1} + \cdots$$

Setzt man noch

(13) $$\zeta_n = -\frac{2^{2n}\cdot B_n}{(2n)!},$$

so hat man in B_n die sogenannten Bernoullischen Zahlen vor sich. Es ist also

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30}\cdots.$$

Die weitere Rechnung liefert

(14) $$B_3 = \frac{1}{42},\quad B_4 = \frac{1}{30},\quad B_5 = \frac{5}{66},\quad B_6 = \frac{691}{2730},\quad B_7 = \frac{7}{6}\cdots.$$

Die Bernoullischen Zahlen werden uns noch mehrfach begegnen, und wir werden so noch mehrfach Gelegenheit haben, weitere Eigenschaften derselben zu entwickeln.

8. Einige weitere elementare Funktionen. Wir fügen noch[1]) die Entwicklungen von $\log(1+z)$, von $\operatorname{arctg} z$ und $\arcsin z$ an, die man durch Integration der entsprechenden Entwicklungen ihrer Ableitungen erhält.

Wir wissen von S. 79 und haben auf S. 102 schon benutzt, daß jeder Zweig der unendlichvieldeutigen Funktion

$$\log(1+z)$$

im Einheitskreis $|z| < 1$ eindeutig und analytisch erklärt ist, und daß sich die verschiedenen Zweige dieser Funktion voneinander um Vielfache von $2\pi i$ unterscheiden. Wir entscheiden uns für denjenigen dieser Zweige, der für $z = 0$ verschwindet. Er wird durch das Integral

$$\log(1+z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta}$$

dargestellt. Daher findet man

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \cdots - (-1)^n \frac{z^n}{n} + \cdots.$$

Weiter wird
$$\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}.$$
Daher hat man

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - + \cdots. \tag{15}$$

Ebenso findet man aus

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} z^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} z^6 \cdots,$$
daß

$$\arcsin z = z + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{z^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{z^7}{7} + \cdots. \tag{16}$$

9. Legendresche Polynome. Zum Schluß dieses Paragraphen behandeln wir noch ein etwas komplizierteres Beispiel. Wir wollen

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$$

nach Potenzen von z entwickeln und das allgemeine Bildungsgesetz der Koeffizienten ergründen. Der Wert der Quadratwurzel werde in einem genügend kleinen Kreise um $z = 0$ dadurch festgelegt, daß man der Wurzel für $z = 0$ den Wert $+1$ beilegt. Damit dadurch im ganzen Kreis die Wurzel eindeutig

1) Wegen der Funktionen $\frac{1}{\sin z}$ und $\frac{1}{\cos z}$ vgl. man S. 182ff.

bestimmt sei, muß man den Kreis so klein wählen, daß keine Nullstelle der Wurzel in ihm liegt. Läßt man namentlich für x nur *reelle* Werte von einem *Betrag unter Eins* zu, so wird dieser Kreis stets der Einheitskreis, denn die Nullstellen der Wurzel liegen dann bei

$$z = x \pm i\sqrt{1 - x^2},$$

und diese Zahlen haben stets den Betrag Eins. Es ist ja

$$z\bar{z} = x^2 + 1 - x^2 = 1.$$

Somit stellt unter den angegebenen Bedingungen

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}}$$

eine im Einheitskreis reguläre Funktion von z dar. Es gibt daher eine Maclaurinsche Reihe

$$1 + P_1(x)\, z + \cdots + P_n(x)\, z^n + \cdots,$$

die im Einheitskreis unsere Funktion darstellt. Daher ergibt sich für den Koeffizienten $P_n(x)$ die Integraldarstellung

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\circlearrowleft} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}\sqrt{1 - 2x\zeta + \zeta^2}}. \tag{17}$$

Das Integral hat man dabei über einen mit dem Einheitskreis konzentrischen Kreis von kleinerem Radius zu erstrecken. Der Wert der Wurzel $w(\zeta) = \sqrt{1 - 2x\zeta + \zeta^2}$ auf dem Integrationsweg ist durch die Bedingung $w(0) = +1$ festgelegt. Ich mache zunächst die Substitution $\zeta = \frac{1}{t}$; dabei wird aus dem Integrationsweg ein den Punkt $t = \infty$ im positiven, d. h. den Punkt $t = 0$ im negativen Sinne umlaufender Kreis von einem Radius großer als 1. Es wird

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\circlearrowleft} \frac{dt \cdot t^n}{w(t)}.$$

Die Wurzel ist jetzt durch die Bedingung $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{w(t)}{t} = +1$ festgelegt. Es wird ja

$$\frac{w(t)}{t} = \sqrt{1 - 2x\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} = \sqrt{1 - 2x\zeta + \zeta^2}.$$

Nun befolgen wir weiter den Weg, den man auch im Reellen bei der Auswertung

eines derartigen Integrales einschlägt.[1]) Wir machen z. B. die Substitution

$$w(t) + t = z.$$ Dann wird bekanntlich

$$(18)\qquad P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^n}\int \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz.$$

Der Integrationsweg ist jetzt das durch die Abbildung $z = t + \sqrt{1-2xt+t^2}$ in der z-Ebene erhaltene Bild eines den Punkt $t = \infty$ umschließenden Kreises, der demjenigen Blatt der Riemannschen Fläche von $w = \sqrt{1-2xt+t^2}$ angehört, in dem $\frac{w(t)}{t} \to +1$ gilt.

Um diese Verhältnisse deutlich zu übersehen, müssen wir uns zunächst darüber klar sein, daß die Riemannsche Fläche von $w = w(t)$ zweiblättrig über der t-Ebene ausgebreitet ist und ihre beiden Verzweigungspunkte an den Stellen $x \pm i\sqrt{1-x^2}$ besitzt. Auf dieser Fläche ist somit auch $t + w(t) = z$ eine eindeutige Funktion des Ortes. Diese Funktion vermittelt dazu eine Abbildung der Fläche auf die schlichte volle z-Ebene. Das leuchtet ein, wenn wir uns der schon eben bei der Umrechnung des Integrales benutzten Tatsache erinnern, daß $t = \frac{z^2-1}{2(z-x)}$ also eine eindeutige Funktion von z wird. Ebenso wird

$$w(t) = \frac{z-x}{z},$$

also gleichfalls eindeutig in z. Bei dieser Abbildung geht nun weiter derjenige unendlichferne Punkt der Fläche, in welchem $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{w(t)}{t} = 1$ wird, in $z = \infty$ über. Denn $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{z}{t} = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{t+w(t)}{t} = 1 + \lim\limits_{t\to\infty}\frac{w(t)}{t} = 1 + 1 = 2$. Der Integrationsweg in dem Integral (18) ist also eine einfach geschlossene Kurve der z-Ebene, welche den Punkt ∞ im negativen Sinne umschließt. Der Punkt x, der dem Einheitskreis angehört, wird also in positivem Sinne umschlossen. Daher läßt die Integralformel (5) von S. 130 sofort erkennen, daß

$$(19)\qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Der Koeffizient $P_n(x)$ ist also eine ganze rationale Funktion n-ten Grades von x. Die so gefundenen Polynome sind die *Legendreschen Polynome* aus der Theorie der Kugelfunktionen.

1) Vgl. auch S. 115.

§ 13. Der Satz von der analytischen Fortsetzung der gleichmäßigen Konvergenz (Satz von Vitali).

1. Der Satz. Dieser Satz stellt eine moderne Erweiterung des klassischen Weierstraßschen Satzes (S. 155) dar. Gleich diesem gehort er wegen seiner ungeheuren Tragweite zu den wichtigsten Sätzen der ganzen Theorie. Der Satz lautet: *Es sei bekannt, daß die Reihe $f_1(z) + f_2(z) + \cdots$ in einer Punktmenge eines Bereiches B konvergiere, welche in B einen Haufungspunkt besitzt. Es sei weiter bekannt, daß die Teilsummen der Reihe in B gleichmaßig beschrankt sind, d. h. es gebe eine Zahl M, unter der samtliche Teilsummen dem Betrage nach für alle Stellen des Bereiches B liegen. Dann ist die Reihe in jeder abgeschlossenen Teilmenge von B gleichmaßig konvergent und stellt also eine in B analytische Funktion dar. Der Satz wird vielfach „Vitalischer Satz" genannt.*

Der große Wert des Satzes liegt in dem geringen Maße von Voraussetzungen, die er macht. Nicht einmal die durchgangige Konvergenz muß man von Hause aus wissen. Vor einem Irrtum sei von vornherein gewarnt. Aus dem Satze folgt ganz und gar nicht, daß jede konvergente Reihe analytischer Funktionen eine analytische Summe hat. Denn es gibt konvergente Reihen, deren Teilsummen nicht gleichmäßig beschrankt sind, fur die also unser Satz nicht gilt. Freilich ist auch da, wie man zeigen kann, nicht mehr aller Willkür Tur und Tor geoffnet. Es gibt nämlich immer Teilbereiche von B, wo die Summe analytisch ist. (Vgl. 8.)

Fig 53

Der Beweis des Satzes ist schon auf die mannigfachste Weise gefuhrt worden. Sehr bequem ist es, sich auf die Cauchysche Integralformel zu stutzen.[1]) Daß man aus der Konvergenz an einigen Stellen auf die Konvergenz an anderen muß schließen konnen, ist eine leichte Folgerung aus unserer Beweismethode des Weierstraßschen Doppelreihensatzes. *Denn nehmen wir etwa an, es gebe im Bereich B eine rektifizierbare Kurve $\mathfrak{C}$, die darin einen Bereich G begrenzt, und auf ihr konvergiere die Reihe gleichmaßig* (Fig. 53). *Dann konvergiert sie auch im Innern des Bereiches G.* Denn in diesem Bereiche ist ja

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta .$$

1) Einen anderen Beweis findet man z. B. in meiner „Einfuhrung in die konforme Abbildung". 2. Aufl. Berlin 1927 (Sammlung Goeschen 768).

Bei festgehaltenem z konvergiert aber die Reihe

$$\sum \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}$$

auf $\mathfrak{C}$ gleichmäßig. Sei ihre Summe $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$,

so ist
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = f(z)$$

eine analytische Funktion. Andererseits aber ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum f_n(z).$$

Durch weiteren Ausbau dieser Überlegung kann man auch die gleichmäßige Konvergenz in G erschließen. Man hat dazu nur zu bemerken, daß ein jeder Reihenrest das Maximum seines absoluten Betrages am Rande von G, also auf $\mathfrak{C}$ annimmt. Da aber dort wegen der gleichmäßigen Randkonvergenz die Reste von einem gewissen an unter ε bleiben, so ist das auch in G der Fall.

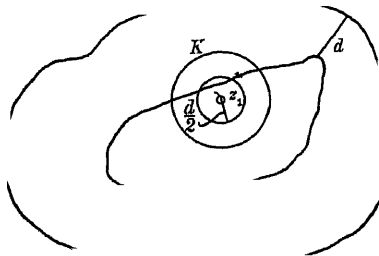
Noch sei bemerkt, daß das so bewiesene Ergebnis keine unmittelbare Folge des Vitalischen Satzes ist. Denn der Vitalische Satz setzt voraus, daß der Häufungspunkt der Konvergenzpunkte im Bereich liege, während wir hier Konvergenz am Rande annahmen

2. Beweis. Wir wenden uns nun nach dieser Abschweifung zum Beweis des Satzes.

a) Wir betrachten dazu einen Teilbereich G von B, dessen Rand vom Rand des Bereiches den Abstand d besitzen möge. Zunächst werden wir zeigen, daß in diesem Bereiche G die Teilsummen s_1, s_2, $\cdots$ der Reihe *gleichmäßig stetig* sind. Das Wort gleichmäßig bezieht sich dabei auf die Stellen des Bereiches und auf die Nummern der Teilsummen. Es soll also nachgewiesen werden, daß es eine Funktion $\delta(\varepsilon)$ gibt derart, daß

$$|s_n(z_1) - s_n(z_2)| < \varepsilon, \text{ sobald } |z_1 - z_2| < \delta(\varepsilon) \text{ ist,}$$

Fig 54.

ganz einerlei, wie die Nummer n und wie sonst die Stellen z_1 und z_2 im Bereiche G gewählt sein mögen. Das ergibt sich wieder sofort aus dem Cauchyschen Integralsatz. Um jeden Punkt z_1 des Bereiches G kann man einen Kreis K vom Radius d schlagen, der ganz in B liegt (Fig. 54). Wählen wir nun einen Punkt z_2, dessen Abstand von z_1 den Wert $\frac{d}{2}$

nicht übersteigt, so liefert die Integralformel

$$|s_n(z_1) - s_n(z_2)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int \frac{s_n(\zeta)(z_2 - z_1)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)}\, d\zeta\right| < \frac{M|z_1 - z_2|\,2}{d}.$$

Sobald also
$$|z_1 - z_2| < \frac{\varepsilon d}{2M} = \zeta(\varepsilon)$$

ist, bleibt für alle n und alle z_1 des Bereiches G immer

$$|s_n(z_1) - s_n(z_2)| < \varepsilon.$$

b) Das war der erste Schritt. Jetzt wählen wir aus der Gesamtheit aller Teilsummen zunächst einmal eine Teilfolge aus. Diese sei so ausgesucht, daß sie in einer überall dichten Punktmenge des Bereiches G konvergiere. Das kann auf folgende Weise bewerkstelligt werden. Wir denken uns die Bereichpunkte mit rationalen Koordinaten x, y in irgendeiner Weise numeriert. Die Punkte seien dann $z_1, z_2, \cdots$. Ich betrachte die Werte $s_n(z_1)$. Da ihre Beträge beschränkt sind, besitzen diese Werte mindestens einen Häufungswert, und man kann eine Teilfolge unter den Werten $s_n(z_1)$ herausgreifen, welche nur einen dieser Häufungspunkte besitzt. Dazu mögen etwa die Funktionen $s_{\lambda_1}(z)$, $s_{\lambda_2}(z)$, . . Verwendung finden. Diese Funktionen besitzen also an der Stelle z_1 einen Grenzwert. Nun betrachte ich die Werte dieser neuen Folge an der Stelle z_2. Wieder kann ich eine Teilfolge herausgreifen, die nun auch an der Stelle z_2 einen Grenzwert besitzt. Diese sei $s_{\mu_1}(z)$, . . So weiterfahrend erhalte ich eine unendliche Kette von Funktionenfolgen

$$\begin{array}{l} s_{\lambda_1}(z),\ s_{\lambda_2}(z),\ s_{\lambda_3}(z)\ \cdots \\ s_{\mu_1}(z),\ s_{\mu_2}(z),\ s_{\mu_3}(z)\ \cdots \\ s_{\nu_1}(z),\ s_{\nu_2}(z),\ s_{\nu_3}(z)\ \cdots \end{array}$$

Jede Folge ist eine Teilfolge aller vorhergehenden. Die erste Folge besitzt an der Stelle z_1 einen Grenzwert, die zweite an den Stellen z_1 und z_2, die dritte an den Stellen z_1, z_2, z_3 usw. Nun ist es leicht, eine neue Teilfolge anzugeben, welche an *allen* Stellen $z_1, z_2, \ldots$ einen Grenzwert besitzt. Eine solche Folge ist die Diagonalfolge

$$s_{\lambda_1} = \sigma_1,\ s_{\mu_2} = \sigma_2,\ s_{\nu_3} = \sigma_3 \cdots.$$

Denn als Teilfolge der ersten konvergiert sie an der Stelle z_1. Von ihrer zweiten Funktion an ist sie auch eine Teilfolge der zweiten Folge unserer Kette, konvergiert also auch an der Stelle z_2. Von σ_3 an ist sie in der dritten Folge enthalten, konvergiert also auch an der Stelle z_3 usw. Mit $\sigma(z_n)$ sei der Grenzwert der Folge an der Stelle z_n bezeichnet.

c) Das war der zweite Schritt. Nun vereinigen wir beide Uberlegungen, um zu erkennen, daß diese ausgewahlte Funktionenfolge in ganz G konvergiert. Schlage ich nämlich um irgendeinen rationalen Punkt $z_\varkappa$ einen Kreis K:

$$|z - z_\varkappa| \leqq \frac{\varepsilon d}{2M},$$

so ist in ihm nach a) fur alle n

$$|\sigma_n(z) - \sigma_n(z_\varkappa)| < \varepsilon.$$

Nun gibt es (bei festem $\varkappa$) eine Nummer $N(\varepsilon)$, so daß für alle $n > N(\varepsilon)$:

$$|\sigma(z_\varkappa) - \sigma_n(z_\varkappa)| < \varepsilon$$

ist. Daher wird für $n > N(\varepsilon)$ auch

$$|\sigma(z_\varkappa) - \sigma_n(z)| < 2\varepsilon.$$

Daher wird fúr beliebiges positives m und fur $n > N(\varepsilon)$ im Kreise K

$$|\underset{n+m}{\sigma}(z) - \sigma_n(z)| < 4\varepsilon.$$

Dieser Schluß kann aber an jeder Stelle z fur jedes ε ausgefuhrt werden, da in beliebiger Nähe von z rationale Punkte liegen. Daher konvergiert die Folge $\sigma_1(z), \sigma_2(z), \ldots$ im ganzen Bereiche G überall.

d) Das war der dritte Schritt. Wir zeigen nun, daß die Folge $\sigma_n(z)$ in G gleichmäßig konvergiert.

Aus der in ganz K gultigen Abschatzung

$$|\underset{n+m}{\sigma}(z) - \sigma_n(z)| < 4\varepsilon$$

und der eben bewiesenen Konvergenz

$$\lim_{m\to\infty} \underset{n+m}{\sigma}(z) = \sigma(z)$$

folgt, daß in ganz K auch

$$|\sigma(z) - \sigma_n(z)| \leqq 4\varepsilon \text{ fur } n > N(\varepsilon) \qquad \text{sein muß.}$$

Will man noch beweisen, daß die σ_n in G gleichmaßig gegen ihre Grenzfunktion konvergieren, so hat man noch zu bemerken, daß man G mit *endlich*vielen dieser Kreise bereits vollig uberdecken kann. Man betrachte, um das zu erkennen, die diesen Kreisen gleicher Größe einbeschriebenen Quadrate gleicher Kantenlänge. Selbstverständlich kann man mit endlichvielen solcher

Quadrate ein den ganzen Bereich G überdeckendes Polygon aufbauen. Die Kreise gleicher Mittelpunkte überdecken also auch ganz G. Zu jedem dieser endlichvielen Kreise gehört eine Nummer N derart, daß die Partialsummen $\sigma_\nu(z)$ größerer Nummer sich von der Reihensumme $\sigma(z)$ um weniger als 4ε unterscheiden. Die größte dieser Zahlen N hat dann die Eigenschaft, daß die Partialsummen größerer Nummer sich von der Summe $\sigma(z)$ um weniger als 4ε in ganz G unterscheiden.

e) Das war der vierte Schritt. Nun kommen wir dazu, die *Konvergenz* der *gegebenen* Funktionenfolge $s_n(z)$ zu beweisen. Wenn diese etwa an der Stelle a des Bereiches G nicht konvergierte, so besäßen also die Werte $s_n(a)$ mindestens zwei verschiedene Häufungspunkte A und B. Wir könnten daher zwei Folgen auswählen mit den Grenzfunktionen $\sigma(z)$ und $\tilde{\sigma}(z)$, so daß $\sigma(a) = A$ und $\tilde{\sigma}(a) = B$ verschieden wären. Nehmen wir nun an, unser Bereich G enthielte den Häufungspunkt der im Vitalischen Satz genannten Menge von Konvergenzpunkten. Dann müßten die beiden Funktionen in dieser Punktmenge und ihrem Häufungspunkte übereinstimmen, in a aber voneinander abweichen. Das geht nicht an. Daher muß $\sigma(z) = \tilde{\sigma}(z)$ sein. Daher konvergiert die ursprünglich gegebene Funktionenfolge in G, und zwar gleichmäßig. Denn wir haben ja unter c) gezeigt, daß jede konvergente Teilfolge einer beschränkten Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert. Den hier geführten Beweis können wir in jedem Teilbereich von B wiederholen. Damit ist dann der Satz vollständig bewiesen.

3. Anwendung. Das Integral $\int\limits_a^b f(t, z)\, dt$ stellt jedenfalls dann eine in einem Bereiche B analytische Funktion von z dar, wenn $f(t, z)$ für $a \leqq t \leqq b$ eine in B analytische Funktion von z ist, welche außerdem für alle diese Werte beschränkt ist. Für jeden einzelnen Wert von z muß natürlich $f(t, z)$ nach t integrierbar sein. Wenn dann durchweg $| f(t, z) | < M$ ist, so gilt das gleiche für den absoluten Betrag der Funktionen

$$\varphi_n(z) = \frac{f(a,z) + f\left(a + \frac{b-a}{n}, z\right) + \cdots + f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}, z\right)}{n}(b-a).$$

Ihr Grenzwert ist aber das $\int\limits_a^b f(t, z)\, dt$. Nach dem Satz von Vitali ergibt sich daher die Richtigkeit unserer Behauptung.

4. Beispiel. Wegen $\quad | e^{-t} t^{z-1} | = e^{-t} t^{\Re(z)-1} \quad (t \geq 0)$

ist

$$e^{-t} t^{z-1}$$

in jedem Intervall $0 < a \leqq t \leqq b$ beschränkt, wofern z auf einen festen Bereich

aus dem Inneren der Halbebene $\Re(z) \geqq \delta > 0$ beschränkt wird. Daher ist

$$\int_a^b e^{-t} t^{z-1} dt$$

in jedem z der Halbebene $\Re(z) > 0$ analytisch. Da weiter für alle $b > a > 0$

$$\int_a^b e^{-t} t^{z-1} dt < \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

gilt, und da dieses letztere Integral konvergiert, so ist nach dem Satz von Vitali

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \lim_{h \to 0} \int_h^{\frac{1}{h}} e^{-t} t^{z-1} dt$$

eine in $\Re(z) > 0$ analytische Funktion: die sogenannte Gammafunktion $\Gamma(z)$.

5. Erweiterung. Will man den eben ausgeführten Schluß genau dem Satz vom Beginn dieses Paragraphen anpassen, so setze man etwa $h = \frac{1}{n}$ und lasse n durch ganze Zahlen nach Unendlich streben. Aber man kann den Satz durch den gleichen Beweisgang auch auf den Fall erweitern, daß die gegebene Funktionsmenge $s(z, \lambda)$ (bisher $s_n(z)$) statt von einer Nummer n von einem kontinuierlich veränderlichen Parameter λ abhängt. Wenn dann $s(z, \lambda)$ für alle z aus B und die in Betracht kommenden λ analytisch und gleichmäßig beschränkt ist, wenn weiter in einer in B sich häufenden Teilmenge von B der $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} s(z, \lambda)$ existiert, so existiert er für alle z aus B, und die Konvergenz ist in jeder abgeschlossenen Teilmenge von B gleichmäßig. Den Beweis führe der Leser als nützliche Übung selbst durch.

6. Historische Bemerkung. Der in diesem Paragraphen behandelte Satz zeigt eine bemerkenswerte Analogie zu der S. 140 hervorgehobenen Tatsache, daß eine in einem Bereiche analytische Funktion völlig bestimmt ist, wenn man ihre Werte an unendlichvielen Stellen kennt, die sich im Bereichinneren häufen, nur daß hier außer der Existenz des Grenzwertes der Partialsummen an solchen Stellen noch die Beschränktheit derselben vorausgesetzt werden muß. Den ersten Schritt in dieser Richtung tat 1894 Stieltjes, der Konvergenz in einem Teilbereich voraussetzte. W. F. Osgood konnte 1901 mit Konvergenz in einer Teilmenge auskommen, die einen Teilbereich überall dicht erfüllt. Endlich konnten Porter und Vitali 1905/06 unabhängig voneinander und gleichzeitig den Satz in voller Allgemeinheit erlangen. Es erscheint daher historisch nicht gerecht, wenn man den bewiesenen Satz oft als den Vitalischen Satz bezeichnet. Man muß sich hierbei aber auch an

einen älteren ahnlichen Konvergenzsatz erinnern, den Hilbert 1899 in reellem Gebiet bewies. Auch ist hier älterer Arbeiten von Poincaré (1883) und Bendixson (1898) zu gedenken. Die hier betonte Analogie zur analytischen Fortsetzung hat zuerst A. Ostrowski 1922 hervorgehoben und in einer Arbeit in Bd. I der Abhandl. der Math. Sem. der Hamb. Univ. viel weiter verfolgt, als es hier moglich war.

7. Normale Funktionenfolgen. Bei der Beweisfuhrung dieses Paragraphen spielt es eine wesentliche Rolle, daß man aus einer Folge von Funktionen, die in einem Bereich regular sind, und deren absoluter Betrag daselbst unter ein und derselben Schranke M liegt, eine Teilfolge herausnehmen kann, die in jedem abgeschlossenen Teilbereich gleichmäßig konvergiert. Montel hat die grundsatzliche Wichtigkeit solcher Funktionenfolgen erkannt, sie normale Familien genannt und ihnen die Arbeit eines halben Menschenalters gewidmet. Neben den beschränkten Funktionen bilden z. B. die Funktionen eine normale Familie, die in einem gegebenen Bereich zwei gegebene Werte nicht annehmen. Dies lehrt der Satz von Schottky, den wir in Bd. II besprechen.

8. Zusatz. Osgood hat diejenigen Reihen analytischer Funktionen betrachtet, welche in einem Bereich konvergieren und hat gefunden, daß jeder solche Bereich Teilbereiche enthalt, in welchen die Reihe gleichmäßig konvergiert. Die Natur dieser Gebiete und der Grenzfunktionen haben Hartogs und Rosenthal (Math. Anm. 100) näher untersucht.

Siebenter Abschnitt.

Das Residuum.

§ 1. Funktionen mit isolierten Singularitäten.

Die Funktion $f(z)$ moge in einem beliebigen, also im allgemeinen mehrfach zusammenhangenden Bereich G eindeutig und analytisch erklart sein. Im Bereiche sei eine mit einer Durchlaufungsrichtung versehene geschlossene rektifizierbare Kurve $\mathfrak{C}$ gegeben. Man nennt das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz$$

das Residuum der Funktion $f(z)$ in bezug auf die Kurve $\mathfrak{C}$. Wenn man $\mathfrak{C}$ zufällig in einen einfach zusammenhangenden Regularitätsbereich von $f(z)$ einbetten kann, so ist das Residuum nach dem Cauchyschen Integralsatz Null. Im allgemeinen wird dies indessen nicht der Fall sein.

Uns interessiert namentlich der Fall, daß $f(z)$ in einem einfach zusammenhängenden Bereich mit Ausschluß von endlichvielen seiner Punkte eindeutig und regulär ist und daß die Kurve $\mathfrak{C}$ eine einfach geschlossene Kurve ist, die einige dieser Punkte genau einmal im positiven Sinne umschließt.[1] Dann ist nach S. 133 unser Integral gleich der Summe von Integralen, die z. B. über Kreise zu erstrecken sind, deren jeder genau einen der von $\mathfrak{C}$ umschlossenen Punkte, und zwar im selben Sinne wie $\mathfrak{C}$, umkreist (Fig. 55).

Die Ausnahmestellen seien etwa

$$a_1,\ a_2,\ \cdots a_n$$

und

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\lambda} A_{\lambda}^{(\varkappa)}(z-a_{\varkappa})^{\lambda}$$

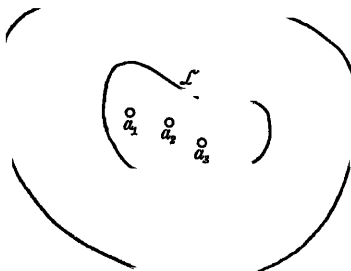



Fig 55.

sei die Laurententwicklung von $f(z)$ in der Umgebung von $a_{\varkappa}$. Dann wird nach dem eben herangezogenen Satz von S. 133

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz = \sum_{1}^{n}{}_{\mu}\frac{1}{2\pi i}\int_{K_\mu} f(z)\,dz,$$

wobei die Einzelintegrale über genügend kleine, je eine Singularität a_μ umschließende Kreise K_μ zu erstrecken sind. Da man aber in einem solchen Kreise die Laurententwicklung zur Verfügung hat, welche man gliedweise integrieren kann, so findet man

$$\int_{K_\lambda} f(z)\,dz = 2\pi i A_{-1}^{(\lambda)}.$$

Man nennt das Integral $$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_\lambda} f(z)\,dz$$

das Residuum von $f(z)$ an der Stelle a_λ. So wird das Residuum an der Kurve $\mathfrak{C}$ gleich der Summe der Residuen an den einzelnen von C umschlossenen singulären Stellen. An jeder dieser Stellen aber wird das Residuum gleich dem Koeffizienten des Gliedes minus erster Ordnung in der Laurententwicklung.

Das Residuum des unendlichfernen Punktes wird durch $\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,dz$ erklärt, erstreckt über einen hinreichend großen Kreis in der Richtung, bei der sein Äußeres zur Linken bleibt. Hinreichend groß, d. h. $f(z)$ soll in allen seinen Außenpunkten, außer eventuell ∞ selbst, regulär sein. Aus dieser Erklärung

1) Verallgemeinerungen (auch an den Kurven $\mathfrak{C}$) wird der Leser an Hand der S. 132 entwickelten Sätze leicht selbst finden.

folgt, daß das Residuum im unendlichfernen Punkt dem negativen Koeffizienten des Gliedes $\frac{1}{z}$ in der Laurententwicklung des Punktes ∞ gleich ist. Man erkennt das, wenn man die Umgebung von $z = \infty$ auf die Umgebung von $t = 0$ durch die Funktion $t = \frac{1}{z}$ abbildet. Dann wird

$$\int\limits_{\circlearrowright} f(z)\,dz = -\int\limits_{\circlearrowleft} f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt.$$

Denn aus dem positiven Durchlaufungssinn eines großen Kreises wird bei dieser Abbildung der negative Durchlaufungssinn eines kleinen Kreises. Es wird aber $\cdots a_{-n}z^n + \cdots a_{-1}z + a_0 + a_1\frac{1}{z} + a_2\frac{1}{z^2} = \cdots = \cdots a_{-n}\frac{1}{t^n} + \cdots + a_{-1}\frac{1}{t} + a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$, also $f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2} = \cdots a_{-n}\frac{1}{t^{n+2}} + \cdots + a_0\frac{1}{t^2} + a_1\frac{1}{t} + a_2 + a_3 t + \cdots$.

Während somit eine an der endlichen Stelle a *reguläre* Funktion daselbst immer das Residuum Null besitzt, wird im allgemeinen eine bei ∞ reguläre Funktion dort ein von Null verschiedenes Residuum zeigen. Denn $f(z)$ ist bei ∞ regulär, wenn seine dortige Entwicklung $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ keine negativen Potenzen von $\frac{1}{z}$, d. h. keine positiven Potenzen von z enthält. Das Glied $\frac{1}{z}$, welches das Residuum bestimmt, wird aber in $\mathfrak{P}(z)$ im allgemeinen vorkommen.

Für die Bestimmung des *Residuums eines Produktes* hat man eine bequeme Regel, wenn an der betreffenden Stelle der eine Faktor regulär ist, der andere aber einen Pol erster Ordnung besitzt. Sei nämlich dann r das Residuum von $f(z)$ bei $z = a$, $g(z)$ aber hier regulär, so wird $r\,g(a)$ das Residuum von $f(z)\cdot g(z)$. Denn man hat ja

$$\begin{aligned} f(z)g(z) &= \left(\frac{r}{z-a} + \mathfrak{P}(z-a)\right)\left(g(a) + (z-a)\mathfrak{P}_1(z-a)\right) \\ &= \frac{r g(a)}{z-a} + \mathfrak{P}_2(z-a). \end{aligned}$$

Hierunter fällt insbesondere die Bestimmung des Residuum eines Quotienten

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

an einer einfachen Nullstelle des Nenners, welche nicht zugleich eine Nullstelle des Zählers ist. Sei a eine solche Stelle, so wird

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{f(a) + f'(a)(z-a) + \cdots}{\varphi'(a)(z-a) + \cdots} = \frac{1}{z-a}\left\{\frac{f(a)}{\varphi'(a)} + (z-a)\,\mathfrak{P}(z-a)\right\}.$$

Also ist $\frac{f(a)}{\varphi'(a)}$ das Residuum an der Stelle a.

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $\frac{1}{\cos z}$. Der $\cos z$ verschwindet fur die ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$, also wenn $z = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ist. Diese Stellen zerfallen in die beiden Sorten $z = (4m+1)\frac{\pi}{2}$ und $z = (4m+3)\frac{\pi}{2}$. Fur die Stellen $z = (4m+1)\frac{\pi}{2}$ nimmt die Ableitung des $\cos z$, also $-\sin z$, den Wert -1, für $z = (4m+3)\frac{\pi}{2}$ dagegen den Wert $+1$ an. Also hat an den Stellen $z = (4m+1)\frac{\pi}{2}$ das Residuum von $\frac{1}{\cos z}$ den Wert -1, an den Stellen $z = (4m+3)\frac{\pi}{2}$ den Wert $+1$ Beides kann in die Aussage zusammengefaßt werden, daß $\frac{1}{\cos z}$ an der Stelle $z = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ das Residuum $(-1)^{n-1}$ besitzt.

Die Funktion $\frac{f(z)}{\cos z}$ hat somit bei $z = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ das Residuum

$$(-1)^{n-1} f\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

wofern nicht $f\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$ verschwindet.

Ahnlich findet man, daß $\operatorname{cotg} \pi z$ an der Stelle $z = n$ das Residuum 1 besitzt.

Also wird $\qquad f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \frac{1}{2\pi i}\int f(z) \operatorname{ctg} \pi z\, dz,$

erstreckt uber eine Kurve, die $z = 1, 2 \cdots n$ je einmal im positiven Sinne umlauft, die ubrigen ganzzahligen Punkte aber ausschließt. Uber die Residuen gilt der folgende Hauptsatz:

Wenn $f(z)$ eine eindeutige Funktion ist, welche in der ganzen unendlichen Ebene (einschließlich $z = \infty$) nur endlichviele singulare Stellen besitzt, so ist die Summe der Residuen aller dieser singularen Stellen Null

Denn sei K ein Kreis, in dessen Außerem mit eventueller Ausnahme des unendlichfernen Punktes keine Singularitat mehr liegt. Dann wird

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K f(z)\,dz = \text{der Summe der Residuen aller endlichen singularen Punkte}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K f(z)\,dz = \text{dem Residuum am unendlichfernen Punkt.}$$

Daher wird die Summe der Residuen Null, weil $\int + \int = 0$ ist.

§ 2. Einige Anwendungen der Residuen.

$f(z)$ sei eine in der oberen Halbebene bis auf endlichviele Stellen reguläre eindeutige Funktion, welche in den endlichen Punkten der reellen Achse durchweg regulär ist. Im Unendlichfernen werde sie von mindestens zweiter Ordnung Null, besitze also dort eine Laurententwicklung

$$\frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \cdots.$$

Dann konvergiert das über die reelle Achse erstreckte Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz$$

und ist gleich der Summe der Residuen an den in der oberen Halbebene gelegenen Stellen.

Betrachten wir nämlich zunächst das Integral über den Halbkreis der Fig. 50 S. 137, so ist es der Summe der Residuen an den in seinem Inneren gelegenen singulären Stellen gleich. Wählen wir aber den Halbkreis hinreichend groß, so kommt er in den Konvergenzkreis der Laurententwicklung am unendlichfernen Punkte zu liegen und umschließt so alle Singularitäten der oberen Halbebene. Andererseits aber konvergiert das Integral über den krummen Teil des Halbkreises mit wachsendem Radius gegen Null. Denn sei R ein hinreichend großer Radius, so wird auf ihm wegen der Laurententwicklung

$$|f(z)| < \frac{|c_2| + 1}{R^2},$$

sobald er hinreichend groß ist. Daher wird das über den Halbkreisbogen erstreckte Integral

$$\left|\int f(z)\,dz\right| < \frac{\pi\{|c_2| + 1\}}{R},$$

und das strebt tatsächlich gegen Null. Da aber nun das über den vollen Halbkreisumfang erstreckte Integral einen festen Wert hat (Summe der Residuen) und das über den Kreisbogen erstreckte einem Grenzwert zustrebt, so gilt das gleiche für das geradlinige Integral und es wird

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz = \text{Summe der Residuen.}^{1)}$$

1) Zunächst ist zwar nur bewiesen, daß $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{+R} f(z)\,dz$ existiert. Wegen der für $f(z)$ gegebenen Abschätzung konvergiert aber das Integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz$ und ist daher jenem Grenzwert gleich.

Beispiele.

1. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2} = \pi.$$

Denn die einzige Singularität liegt bei $z = +i$. Es ist aber

$$\lim_{z\to i} (z-i) \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}$$

der Koeffizient der (-1)-ten Potenz der Laurententwicklung bei $z = i$.

2. Auch das schon S. 137 behandelte Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} \quad (n \geqq 1)$$

fällt als Spezialfall unter die eben dargelegten allgemeinen Überlegungen. Es liegt dann nur der eine singulare Punkt $z = i$ vor, und das Integral ist das $2\pi i$-fache Residuum des Integranden an dieser Stelle, also gleich $\frac{\pi}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

3. Das eben gefundene Resultat gilt indessen, wie schon Cauchy erkannt hat, unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen. Es ist nicht nötig, daß die Funktion $f(z)$ im Unendlichfernen regulär sei und von mindestens zweiter Ordnung verschwinde. Es reicht hin, daß in der oberen Halbebene die Funktion $f(z)$ bei Annäherung an $z = \infty$ von stärkerer als der ersten Ordnung verschwinde. Genau formuliert lautet die Annahme so: *$f(z)$ sei in der oberen Halbebene eindeutig und bis auf endlichviele Stellen regulär. Auf der reellen Achse sei die Funktion im Endlichen regulär. Ferner gebe es eine für $\varepsilon > 0$ erklärte Funktion $R(\varepsilon)$, so daß für $|z| > R(\varepsilon)$ stets $|zf(z)| < \varepsilon$. Dann ist $\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{R} f(z)\,dz$ gleich der Summe der Residuen von $f(z)$ in der oberen Halbebene.* Das ist nicht schwer zu beweisen. Wir müssen ja nur einsehen, daß auch unter den jetzigen Voraussetzungen das über den Halbkreis erstreckte Integral $\int_{-R\,\curvearrowleft\,+R} f(z)\,dz$ für $R \to \infty$ den Grenzwert Null hat. Nun wird aber

$$\left|\int_{-R\,\curvearrowleft\,+R} f(z)\,dz\right| \leqq \int_0^{\pi} R\,|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi < \pi\varepsilon \quad \text{für} \quad R > R(\varepsilon).$$

Dieses Integral hat aber ersichtlich für $R \to \infty$ den Grenzwert Null.

4. Die eben angestellten Überlegungen lassen klar erkennen, daß die Voraussetzungen, auf die wir unseren Beweis stützten, noch weiter verallgemeinert werden können. Es kommt doch nur darauf an, daß das Halbkreisintegral

mit wachsendem Radius gegen Null strebt. Dazu muß der Radius aber gar nicht kontinuierlich wachsen, es genügt vollständig, wenn er eine gewisse, ins Unendliche wachsende Wertereihe, beispielsweise die Reihe der ganzen Zahlen durchlauft. Man übersieht sofort, daß die bei der letzten Beweisanordnung verwendeten Schlusse unverandert in Kraft bleiben, wenn dabei $|zf(z)|$ auf diesen Kreisen gleichmäßig gegen Null strebt, d. h. auf denselben von einer gewissen Nummer an kleiner bleibt als eine irgendwie vorgegebene positive Zahl ε. Hier aber erkennt man wieder sofort, daß man von dieser Kleinheitsbedingung gewisse Bogen der einzelnen Kreise ausnehmen darf, wofern nur, kurz gesprochen, ihre Gesamtlänge hinreichend klein ist. Wir wollen diese Andeutungen nicht zu allgemeinen Sätzen verdichten, sondern uns begnugen, an ein paar Beispielen diese Möglichkeiten zu beleuchten. Wir wollen uns dabei mit einem ein wenig allgemeineren Fall befassen, wo aber die in Rede stehenden Verhaltnisse ganz analog liegen. Das uber eine einfach geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ erstreckte Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz$$

liefert namlich die Summe der Residuen an den singulären Stellen von $f(z)$ in dem von $\mathfrak{C}$ umschlossenen Bereich. Wenn nun fur irgendeine gegen Unendlich wachsende Radienfolge dies Integral einem bestimmten Grenzwert, z. B. der Null, zustrebt, so haben wir die Summe der Residuen berechnet. Auch kann man naturlich statt der Kreise Rechtecke oder noch andere Kurven nehmen. Ein solches Beispiel behandelt der nachste Paragraph

§ 3. Partialbruchreihen und Produktdarstellungen für trigonometrische Funktionen.

1. $\frac{1}{\cos z}$. Ich wahle als Beispiel zu den Betrachtungen des vorigen Paragraphen

$$\int \frac{1}{\cos\zeta}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

und erstrecke es uber ein Quadrat, auf welchem keine Pole des Integranden liegen. Es muß also den Bereich, auf welchen wir z beschranken, umschließen — das sei das Quadrat $|x| \leqq r$, $|y| \leqq r$ — und darf durch keine der Stellen $(2n+1)\,\frac{\pi}{2}$ gehen. Wir wählen das Quadrat der Fig. 56 als Integrationsweg. Zunächst haben wir also den

$(-n\pi, n\pi)$ $(n\pi, n\pi)$ $-n\pi$ 0 $n\pi$ $(-n\pi, -n\pi)$ $(n\pi, -n\pi)$

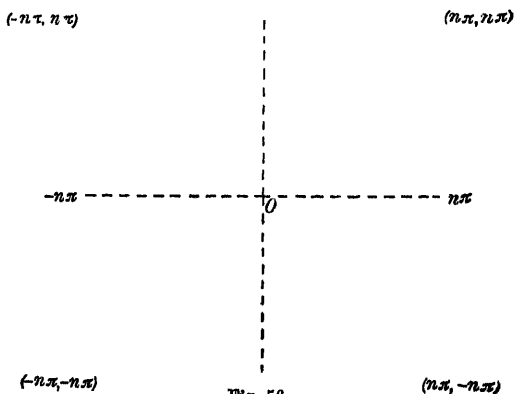



Fig. 56

Grenzwert des Integrales für $n \to \infty$ zu untersuchen. Es wird sich zeigen, daß er verschwindet. Offenbar wird

$$\left|\int \frac{d\zeta}{\zeta - z}\,\frac{1}{\cos\zeta}\right| \leqq \int ds \frac{1}{|\zeta - z|}\,\frac{1}{|\cos\zeta|} \leqq \frac{1}{n\pi - r}\int \frac{ds}{|\cos\zeta|}.$$

Wir wollen nun zeigen, daß $\dfrac{1}{n\pi - r}\displaystyle\int \frac{ds}{|\cos\zeta|}$

für $n \to \infty$ verschwindet. Um das zu erkennen, zerlege ich das Integral den vier Quadratseiten entsprechend in die folgenden vier Teile

$$\int_{-n\pi}^{+n\pi} \frac{d\xi}{|\cos(\xi - i n\pi)|} - \int_{-n\pi}^{+n\pi} \frac{d\xi}{|\cos(\xi + i n\pi)|} + \int_{-n\pi}^{+n\pi} \frac{d\eta}{|\cos(n\pi + i\eta)|} - \int_{-n\pi}^{+n\pi} \frac{d\eta}{|\cos(-n\pi + i\eta)|}.$$

In den beiden letzten Integralen ist

$$\cos(n\pi + i\eta) = \cos(-n\pi + i\eta)$$

und

$$|\cos(n\pi + i\eta)| = \frac{e^{\eta} + e^{-\eta}}{2}.$$

Daher wird

$$\int_{-n\pi}^{+n\pi} \frac{d\eta}{|\cos(n\pi \pm i\eta)|} = 2\int_{-n\pi}^{n\pi} \frac{d\eta}{e^{\eta} + e^{-\eta}} = 4\int_{0}^{n\pi} \frac{d\eta}{e^{\eta} + e^{-\eta}} < 4\int_{0}^{n\pi} e^{-\eta}\,d\eta = 4(1 - e^{-n\pi}).$$

Daher ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\pi - r}\int_{-n\pi}^{+n\pi} \frac{d\eta}{|\cos(n\pi \pm i\eta)|} = 0.$$

Ferner aber wird

$$\cos(\xi \pm i n\pi) = \frac{e^{i\xi}e^{\mp n\pi} + e^{-i\xi}e^{\pm n\pi}}{2}.$$

Also ist

$$|\cos(\xi \pm i n\pi)| \geqq \frac{e^{n\pi} - e^{-n\pi}}{2}.$$

Also wird

$$\int_{-n\pi}^{+n\pi} \frac{d\xi}{|\cos(\xi \pm i n\pi)|} \leqq \frac{4n\pi}{e^{n\pi} - e^{-n\pi}}$$

und beide streben für $n \to \infty$ gegen Null. Also ist wirklich

$$\lim_{n\to\infty} \int \frac{1}{\cos\zeta}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0.$$

Andererseits ist nun dieses Integral gleich der Summe der Residuen an den im Integrationsquadrat gelegenen Singularitäten des Integranden. Bei $\zeta = z$ ist das Residuum $\dfrac{1}{\cos z}$. Bei $\zeta = (2n + 1)\dfrac{\pi}{2}$ hingegen ist nach S. 178 das Residuum $(-1)^n \dfrac{1}{z - \frac{2n+1}{2}\pi}$.

Die Summe der zum Quadrat gehorigen Residuen ist also

$$\frac{1}{\cos z} + \sum_{-n+1}^{n-1}{}_{\varkappa} (-1)^{\varkappa} \frac{1}{z - \frac{2\varkappa+1}{2}\pi}.$$

Der Grenzwert dieses Ausdruckes fur $n \to \infty$ muß verschwinden. Dementsprechend findet man

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{\cos z} = \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}{}_{\varkappa} (-1)^{\varkappa-1} \frac{1}{z - \frac{2\varkappa+1}{2}\pi}.$$

Dieser Grenzwert existiert in jedem Kreis der z-Ebene gleichmaßig in dem Sinne, daß fur alle $|z| \leqq r$ zugleich die Differenz $\frac{1}{\cos z} - \sum_{-n}^{n}{}_{\varkappa} (-1)^{\varkappa-1} \frac{1}{z - \frac{2\varkappa+1}{2}\pi}$ dem Betrage nach unter einer vorgegebenen Schranke $\varepsilon > 0$ liegt. Das lehrte unsere Integralabschätzung. Wir haben damit eine Partialbruchdarstellung des $\frac{1}{\cos z}$ gefunden. Daß man auch absolut konvergente Partialbruchreihen finden kann, werden wir S. 287 sehen.

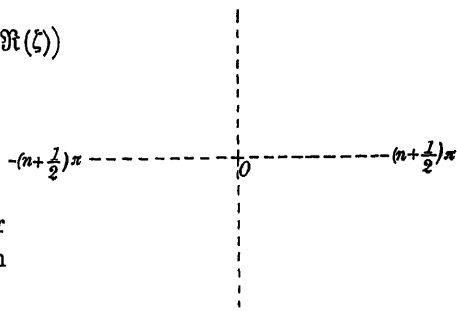
2. $\frac{1}{\sin z}$. Die Partialbruchreihe von $\frac{1}{\sin z}$ kann man ja wegen

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)} = \frac{1}{\sin z}$$

sofort aus der des $\frac{1}{\cos z}$ entnehmen. Man findet auf die eine oder die andere Weise

$$\text{(2)} \qquad \frac{1}{\sin z} = \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}{}_{\varkappa} (-1)^{\varkappa} \frac{1}{z - \varkappa\pi}.$$

3. **cotg z.** Fur cotg z gilt die folgende Partialbruchzerlegung

$$\operatorname{cotg} z = \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{+n}{}_{\varkappa} \frac{1}{z - \varkappa\pi} = \frac{1}{z} + \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{+n}{}' \frac{1}{z - \varkappa\pi}.\text{[1]}$$

Das erkennt man ähnlich wie bei $\frac{1}{\cos z}$. Zunachst ist

$$\operatorname{cotg} z = \sum_{-n}^{+n}{}_{\varkappa} \frac{1}{z - \varkappa\pi} + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\operatorname{cotg} \zeta \, d\zeta}{\zeta - z}.$$

Dabei soll das Integral uber das Quadrat der Fig. 57 erstreckt werden. Auf diesem Quadrat ist $|\operatorname{cotg} \zeta|$ unter einer von n unabhängigen Schranke gelegen. Es wird ja auf den horizontalen Quadratseiten:

[1] Der Strich am Σ deutet an, daß bei der Summation der Wert $\varkappa = 0$ beiseite bleibt.

$$|\operatorname{cotg}\zeta| = \left|\frac{e^{ix}e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} + e^{-ix}e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}}{e^{ix}e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} - e^{-ix}e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}}\right| \quad (x = \Re(\zeta))$$

$$\leqq \frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} + e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}}{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} - e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}}$$

Dieser Ausdruck ist beschrankt, da er fur $n \to \infty$ gegen 1 strebt. Auf den Vertikalen wird

$$|\operatorname{cotg}\zeta| = \left|\frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}}\right| \leqq 1.$$

$-(n+\frac{1}{2})\pi$ — 0 — $(n+\frac{1}{2})\pi$

Fig. 57

Sei also auf dem Quadratrand $|\operatorname{cotg}\zeta| < M$. Um hiernach einsehen zu konnen, daß

$$\int \frac{\operatorname{cotg}\zeta\, d\zeta}{\zeta - z} \to 0$$

strebt fur $n \to \infty$, ist noch ein kleiner Kunstgriff notig. Man hat namlich

$$\int \frac{\operatorname{cotg}\zeta\, d\zeta}{\zeta - z} = \int \frac{\operatorname{cotg}\zeta\, d\zeta}{\zeta} + z\int \frac{\operatorname{cotg}\zeta\, d\zeta}{\zeta(\zeta - z)}.$$

Nun ist aber

$$\int \frac{\operatorname{cotg}\zeta\, d\zeta}{\zeta} = 0.$$

Denn die Pole des Integranden liegen bei $\zeta = n\pi$ Fur $\zeta = 0$ ist das Residuum Null Bei $\zeta = n\pi$ aber ist das Residuum $\frac{1}{n\pi}$. Daher ist die Summe der Residuen an den im Quadrat gelegenen Polen Null, da zu jedem n sein negatives auftritt. Daß

$$\int \frac{\operatorname{cotg}\zeta\, d\zeta}{\zeta(\zeta - z)} \to 0$$

strebt fur $n \to \infty$, kann nun aber leicht eingesehen werden Beschrankt man namlich wieder z auf das Quadrat $|x| \leqq r$, $|y| \leqq r$, so wird der Betrag des Integrales kleiner als

$$\frac{M \cdot 4(2n+1)\pi}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - r\right]} = \frac{16M}{(2n+1)\pi - 2r},$$

was fur $n \to \infty$ gegen Null strebt

So haben wir also wirklich:

$$(3) \qquad \operatorname{cotg} z = \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n} {}_{\varkappa} \frac{1}{z - \varkappa\pi} = \frac{1}{z} + \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}{}' \frac{1}{z - \varkappa\pi}.^{1)}$$

1) Der Strich am Σ deutet an, daß bei der Summation der Wert $\varkappa = 0$ beiseite bleibt

4. Produktdarstellung von $\sin z$. Wir gehen davon aus, daß

$$\frac{d \log \sin z}{dz} = \operatorname{cotg} z.$$

Daher findet man

$$\log \sin z = h + \log z + \int_0^z d\zeta \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}{}' \frac{1}{\zeta - \varkappa\pi} = h + \log z + \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{+n}{}' \log\left(1 - \frac{z}{\varkappa\pi}\right)$$

und[1)]

$$\sin z = e^h z \lim \prod_{-n}^{+n}{}' \left(1 - \frac{z}{\varkappa\pi}\right).$$

Die Integrationskonstante h kann nun dadurch bestimmt werden, daß

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

sein muß, daß aber $\displaystyle \lim_{z\to 0} \lim_{n\to\infty} \prod_{-n}^{n}{}' \left(1 - \frac{z}{\varkappa\pi}\right) = 1$

ist. Daher ist $e^h = 1$, und man hat

$$\sin z = z \lim_{n\to\infty} \prod{}' \left(1 - \frac{z}{\varkappa\pi}\right) = z \cdot \prod_{\varkappa=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\varkappa^2\pi^2}\right) \tag{4}$$

Diese Produktdarstellung des Sinus hat man als eine Verallgemeinerung der bekannten Zerlegung der ganzen rationalen Funktionen in Primfaktoren anzusehen. Daß für alle ganzen Funktionen derartige Zerlegungen existieren, werden wir S. 294 lernen.

5. Anwendung auf die Potenzreihenentwicklung von $\operatorname{cotg} z$. Da die Partialbruchreihe gleichmäßig konvergiert, muß es möglich sein, unter Verwendung des Weierstraßschen Doppelreihensatzes aus den Potenzreihenentwicklungen der einzelnen Reihenglieder durch Addition die Potenzreihe des

1) Wir erhalten so ein unendliches Produkt. Darüber sei nur folgendes bemerkt. Erhebt man eine unendliche Reihe, deren Summe als Grenzwert der Teilsummen erklärt ist, zur Exponentialfunktion, so erhält man ein unendliches Produkt, dessen Wert als Grenzwert derjenigen Teilprodukte erklärt ist, welche man erhält, wenn man die Teilsummen der Reihe zur Exponentialfunktion erhebt. Ein unendliches Produkt ist also dann und nur dann konvergent, wenn die Reihe der Logarithmen seiner Faktoren konvergiert, d. h. dann und nur dann, wenn der Limes der Teilprodukte existiert und von Null verschieden ist. Der Limes kann natürlich auch einmal Null sein. Dann nennt man aber das Produkt eben wegen des Zusammenhanges mit den unendlichen Reihen nicht mehr konvergent. Nach dieser Erklärung ist klar, wann das Produkt gleichmäßig konvergiert Das ist dann der Fall, wenn der Limes der Teilprodukte existiert (und $\neq 0$ ist), oder, was dasselbe ist, dann, wenn die Reihe der Logarithmen gleichmäßig konvergiert.

cotg z zu gewinnen. Dieser Gedanke führt zu interessanten Folgerungen. Man findet ja

$$\frac{1}{z-\varkappa\pi} = -\frac{1}{\varkappa\pi} - \frac{z}{\varkappa^2\pi^2} - \frac{z^2}{\varkappa^3\pi^3}\cdots.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots,$$

so muß $\quad \operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} - \frac{2}{\pi^2} S_2 z - \frac{2}{\pi^4} S_4 z^3 - \cdots - \frac{2}{\pi^{2n}} S_{2n} z^{2n-1}\ldots$

werden. Für diese Koeffizienten, die hier als Summen unendlicher Reihen auftreten, hatten wir aber S. 166 schon numerische Werte gefunden. Vergleicht man beide Ergebnisse miteinander, so sind wir nun in der Lage, die Summen S_{2n} auszuwerten. Man findet[1])

$$S_{2n} = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!} B_n. \tag{5}$$

Also wird z. B. $\quad S_2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}. \tag{6}$$

6. $\frac{1}{\sin z}$. Aus der Partialbruchreihe (2) findet man

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \frac{2s_2}{\pi^2} z + \frac{2s_4}{\pi^4} z^3 + \cdots.$$

Dabei ist zur Abkürzung

$$s_n = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - + \cdots \qquad \text{gesetzt.}$$

Zur Summation dieser Reihen brauchen wir aber nun nicht noch einmal auf die allgemeinen Entwicklungen von S. 166 zurückzugehen. Vielmehr kann man diese Summen durch die Kotangenskoeffizienten S_n und damit letzten Endes durch die Bernoullischen Zahlen ausdrücken. Man sieht nämlich sofort, daß

$$S_{2n} - \frac{2}{2^{2n}} S_{2n} = s_{2n}$$

ist. Daher wird $\quad s_{2n} = \frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n-1}} S_{2n} = \frac{(2^{2n-1}-1)}{(2n)!} \pi^{2n} B_n.$

1) Diese und die weiter noch anzugebenden Summenformeln sind darum von besonderem Nutzen, weil die direkte numerische Berechnung der Reihensummen praktisch unmöglich ist. Um S_2 z. B. auf $\frac{1}{10^3}$ genau zu berechnen, braucht man tausend Reihenglieder.

Die Entwicklung von $\frac{1}{\sin z}$ beginnt also so:

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{6} z + \frac{7}{360} z^3 + \cdots.$$

7. $\frac{1}{\cos z}$. Man findet zunächst aus der Partialbruchreihe (1), daß

$$\frac{1}{\cos z} = \sigma_1 \cdot \frac{4}{\pi} + \sigma_3 \frac{2^4}{\pi^3} z^2 + \cdots + \sigma_{2n+1} \frac{2^{2n+2}}{\pi^{2n+1}} z^{2n} + \cdots.$$

Dabei ist zur Abkürzung $\quad \sigma_n = 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} \cdots$

gesetzt. Zur Auswertung dieser Summen greift man am besten auf die allgemeinen Entwicklungen von S. 166 zurück. Man entnimmt ihnen, daß für $n \geqq 1$

$$\sigma_{2n+1} = \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}} \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2!} & 0 & \frac{1}{4!} & \cdots & 0 & \frac{(-1)^n}{(2n)!} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2!} & 0 & \cdots & \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2!} & \cdots & 0 & \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

So hat man z. B.

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdots = \frac{\pi}{4}$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} \cdots = \frac{\pi^3}{32}$$

$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} \cdots = \frac{5\pi^5}{3 \cdot 2^9}.$$

Also wird

$$\frac{1}{\cos z} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{5}{24} z^4 + \cdots.$$

Setzt man allgemein

$$\frac{1}{\cos z} = 1 + \frac{E_1}{2!} z^2 + \frac{E_2}{4!} z^4 + \cdots + \frac{E_n}{(2n)!} z^{2n} + \cdots$$

an, so heißen die ganzen positiven Zahlen E_n *Eulersche Zahlen oder Sekantenkoeffizienten*. Eine explizite Darstellung derselben wird der Leser unseren Darlegungen leicht entnehmen.

Aufgaben. 1. Man leite die Darstellung

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} \frac{1}{(\nu - z)^2}$$

nach der Residuenmethode her.

2. Man leite die Partialbruchreihe für $\operatorname{tg} z$ her.

3. Man leite die Partialbruchreihe von $\frac{1}{\sin z}$ aus der von $\operatorname{cotg} z$ her und betrachte von diesem Standpunkt aus den Zusammenhang zwischen s_{2n} und S_{2n}.

§ 4. Das logarithmische Residuum.

1. Definition und Grundsatz. Im Bereiche B sei die Funktion $f(z)$ bis auf endlichviele Pole eindeutig und regulär. Sie sei nicht identisch Null. Setzen wir daher noch voraus, daß sie auch am Rande des Bereiches regulär ist, so besitzt sie im Bereiche nur endlichviele Nullstellen. $\mathfrak{C}$ sei eine aus einem oder mehreren Teilen bestehende rektifizierbare Kurve, die jede Nullstelle und jeden Pol von $f(z)$ genau einmal im positiven Sinne umlaufen möge. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overset{\mathfrak{C}}{\curvearrowleft}} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \text{Anzahl der Nullstellen} - \text{Anzahl der Pole in } B.$$

Da der Integrand die Ableitung von $\log f(z)$ ist, spricht man hier vom logarithmischen Residuum der Funktion $f(z)$. Jeder Pol und jede Nullstelle ist nach ihrer Vielfachheit zu zählen, d. h. also ein m-facher Pol z. B. zählt als m Pole. Der Beweis ergibt sich daraus, daß nach S. 177 das Residuum an $\mathfrak{C}$ gleich der Summe der Residuen an den von $\mathfrak{C}$ umschlossenen Stellen ist.

An der n-fachen Nullstelle a ist aber

$$f(z) = (z-a)^n\,(c_n + \mathfrak{P}\,(z-a)) \quad (c_n \neq 0)$$

$$\log f(z) = n \log(z-a) + \log(c_n + \mathfrak{P}\,(z-a))$$

$$\frac{d}{dz}(\log f(z)) = \frac{f'(z)}{f(z)} = n\,\frac{1}{z-a} + \mathfrak{P}_1(z-a).$$

Hier hat also das Residuum von $\frac{f'(z)}{f(z)}$ den Wert n. Am m-fachen Pol hingegen wird

$$f(z) = (z-a)^{-m}\,(c_m + \mathfrak{P}\,(z-a)) \quad (c_m \neq 0).$$

Also
$$\log f(z) = -m \log(z-a) + \mathfrak{P}_1\,(z-a).$$

Also
$$\frac{d \log f(z)}{dz} = \frac{f'(z)}{f(z)} = -m\,\frac{1}{z-a} + \mathfrak{P}_1'(z-a).$$

Daher wird hier das Residuum den Wert $-m$ bekommen.

Betrachtet man statt des aufgeschriebenen das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz,$$

so wird dies gleich der Anzahl der Stellen, wo $f(z)$ den Wert a annimmt,

vermindert um die Zahl der Stellen, wo $f(z)$ Pole besitzt. Dabei ist wieder jede Stelle ihrer Vielfachheit nach zu zählen.

2. Der Fundamentalsatz der Algebra. Der nun bewiesene Satz ist außerordentlich fruchtbar. Wir wollen eine große Zahl von Folgerungen ziehen.

Zunächst werde bemerkt, daß man aus ihm aufs neue den Fundamentalsatz der Algebra erschließen kann: Eine ganze rationale Funktion n-ten Grades hat, wie wir beweisen wollen, n Nullstellen.

Schon auf S. 155 haben wir bemerkt, daß für eine ganze rationale Funktion n-ten Grades $f(z)$ stets $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$ ist. Es gibt also eine Kreisperipherie K um den Nullpunkt als Mittelpunkt, in deren Äußerem keine Nullstellen von $f(z)$ liegen. Daher ist das über diesen Kreis in positivem Sinne erstreckte Integral $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{K}} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz =$ der Zahl der Nullstellen von $f(z)$, wobei jede ihrer Vielfachheit nach gezählt wird. Andererseits wird dies Integral aber gleich n, weil die Funktion im unendlichfernen Punkt einen Pol n-ter Ordnung besitzt. Da nämlich

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{nz^{n-1} + a_1(n-1)z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

$$= \frac{n}{z}\,\frac{1 + \frac{a_1(n-1)}{n}\frac{1}{z} + \cdots}{1 + a_1\frac{1}{z} + \cdots} = \frac{n}{z}\left(1 + \frac{1}{z}\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

die Laurententwicklung von $\frac{f'(z)}{f(z)}$ in der Umgebung des unendlichfernen Punktes ist, hat tatsächlich das Integral den angegebenen Wert n. $f(z)$ hat somit wirklich n Nullstellen.

3. Satz von Rouché. *Im Inneren und am Rande eines Bereiches B seien zwei Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ eindeutig und analytisch erklärt. Auf dem Rande des Bereiches sei $\varphi(z) \neq 0$ und $|\psi(z)| < |\varphi(z)|$. Dann haben $\varphi(z)$ und $\varphi(z) + \psi(z)$ gleichviele Nullstellen im Inneren des Bereiches.*

Man kann sich den Inhalt dieses Satzes geometrisch wie folgt veranschaulichen. Nehmen wir einmal an, wir wußten schon, daß die Abbildungen gebietstreu sind, so bildet $\varphi(z)$ den Bereich B auf einen Bereich ab, dessen Randpunkte um $|\varphi(z)|$ vom Nullpunkt abstehen. Um daraus die Abbildung von $\varphi(z) + \psi(z)$ zu erhalten, hat man jeden Randpunkt um $|\psi(z)|$, also um weniger als $|\varphi(z)|$, also um weniger als seinen Abstand vom Nullpunkt, zu verschieben. Dabei kann der Rand nicht über Null hinweggezogen werden, und daher liegt die Vermutung nahe, daß der abgeänderte Bereich noch ebensooft den Nullpunkt bedeckt.

Eine saubere Durchfuhrung dieses Gedankens führt zum Beweis des Satzes. Es sei $0 \leqq \lambda \leqq 1$ ein reeller Parameter. Wir betrachten die Funktion $\varphi + \lambda\psi$. Dem eigentlichen Beweis schicken wir zwei Vorbetrachtungen voraus:

a) Da die beiden Funktionen φ und ψ am Bereichrande regulär sind, so kann man um jeden Punkt desselben einen Kreis legen, in dem φ und ψ regular sind und in dem a) $\varphi \neq 0$ und b) $|\psi| < |\varphi$ gilt. Er enthält also weder Nullstellen von φ noch solche von $\varphi + \lambda\psi$. Es gibt weiter eine positive Zahl ϱ derart, daß man um jeden Randpunkt einen Kreis dieser Art legen kann, dessen Radius ϱ ubertrifft. Denn sonst gabe es eine Punktfolge $z_\varkappa$ am Rande, deren zugehörige, möglichst groß gewahlte Kreisradien $r_\varkappa$ fur $\varkappa \to \infty$ gegen Null konvergierten. Diese $z_\varkappa$ aber hatten am Rande einen Häufungspunkt z_∞, dem ein von Null verschiedener Radius r zugehort. Diejenigen Punkte $z_\varkappa$ aber, die dem Kreise $|z - z_\infty| < \frac{r}{2}$ angehoren, konnen mit Radien $\geqq \frac{r}{2}$ versehen werden, während doch ihre Maximalradien gegen Null streben sollten.

b) Die Gesamtheit der Bereichpunkte, welche keinem dieser Kreisbereiche angehoren, bilden eine abgeschlossene Menge M, der jedenfalls alle Nullstellen von φ und von $\varphi + \lambda\psi$ angehoren. Da φ und $\varphi + \lambda\psi$ in B und an seinem Rande regular sind, so besitzen sie in B nur endlichviele Nullstellen. Wir greifen aus M diejenigen endlichvielen Kontinua heraus, die Nullstellen enthalten. Zu jedem derselben konstruieren wir nach Satz III S. 86 einen polygonalen Bereich, der das Kontinuum enthalt, die Ränder von B und die ubrigen Punkte von M aber ausschließt. Die Rander dieser polygonalen Bereiche verlaufen in B, weil sie sonst keine Innenpunkte von B vom Rand von B trennen konnten. Sie verlaufen ferner ganz außerhalb von M. Daher ist auf denselben sowohl φ wie ψ regular, und es gilt darauf a) $\varphi \neq 0$ und b) $|\psi| \leqq |\varphi|$. Durchlauft man den polygonalen Rand so, daß dabei das Innere der polygonalen Bereiche zur Linken bleibt, so umlauft derselbe jeden Innenpunkt der polygonalen Bereiche, also auch jede Nullstelle von φ oder von $\varphi + \lambda\psi$ genau einmal im positiven Sinne.

c) Daher wird das uber diese Polygone im eben erwahnten Sinne erstreckte Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi' + \lambda\psi'}{\varphi + \lambda\psi}\, dz$$

der Anzahl der Nullstellen von $\varphi + \lambda\psi$ in B gleich. Nun aber ist es eine stetige Funktion von λ (wie gleich bewiesen werden soll). Da es immer einen ganzzahligen Wert besitzt, so ist es konstant, hat also namentlich fur $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ denselben Wert, was der Satz zum Ausdruck bringt. Daß aber jenes Integral stetig von λ abhängt, folgt entweder durch Abschätzung der Differenz zweier Integrale fur verschiedene Werte von λ oder nach S. 174, wenn

man beachtet, daß $\varphi + \lambda\psi$ wegen $|\psi| < |\varphi|$ bei passender Wahl von $\varrho > 1$ noch in $0 \leqq |\lambda| \leqq \varrho$ am Polygonrand von Nullstellen frei ist. Das Integral stellt dann also eine in $|\lambda| \leqq 1$ reguläre analytische Funktion von λ dar.

§ 5. Der Satz von der Gebietstreue.

Es soll hier bewiesen werden, *daß eine in einem Gebiete G eindeutige und analytische Funktion f(z) dieses Gebiet auf ein anderes Gebiet abbildet,* wofern man den Gebietsbegriff genügend allgemein faßt.[1]) Ich beginne mit dem einfachsten Fall dieses *Satzes von der Gebietstreue:*

$$w = f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

sei in der Umgebung B von $z = 0$ regulär und $c_1 = f'(0)$ sei von Null verschieden. *Dann gibt es, wie ich zunächst zeigen will, einen Kreis um $w = 0$, der von den Werten, die $f(z)$ in B annimmt, völlig überdeckt wird, so daß $f(z)$ in der Umgebung von $z = 0$ alle Werte aus der Umgebung von $w = 0$ annimmt, sowie ferner, daß $f(z)$ in genügender Nähe von $z = 0$ keinen Wert mehr als einmal annimmt.*

Der Nachweis ergibt sich leicht aus dem Satz von Rouché. Ich bemerke zunächst, daß man um $z = 0$ einen Kreis K legen kann, in dem $f(z)$ außer $z = 0$ keine weitere Nullstelle hat. Auch auf seinem Rande sei $f(z) \neq 0$. Am Rande von K sei also etwa $|f(z)| \geqq m > 0$. Wegen der Stetigkeit von $f(z)$ in $z = 0$ und weil $f(0) = 0$ ist, gibt es um $z = 0$ einen zweiten Kreis K_1, in dem $|f(z)| \leqq m$ bleibt. Sei dann α irgendeine Zahl, deren absoluter Betrag kleiner als m ist, so lehrt der Satz von Rouché, daß $f(z) - \alpha$ in dem großen Kreis K ebensooft verschwindet wie $f(z)$. Da aber $f(z)$ nur einmal verschwindet, nämlich bei $z = 0$, so ergibt sich, daß $f(z)$ auch jeden Wert, dessen Betrag kleiner als m ist, in der Umgebung von $z = 0$ genau einmal annimmt. Der Kreis $|w| < m$ wird also bei der Abbildung von K durch $f(z)$ ein einziges Mal voll bedeckt.

Wenn nun also B ein Bereich der z-Ebene ist — ein- oder mehrblättrig, aber zunächst ohne Windungspunkte — und wenn $f(z)$ in demselben eindeutig erklärt ist, und wenn in keinem seiner Punkte die Ableitung $f'(z)$ verschwindet, so wird dieser Bereich durch $f(z)$ auf eine Punktmenge der w-Ebene abgebildet, die nach dem eben Dargelegten zu jedem ihrer Punkte eine volle Umgebung enthält. Da außerdem je zwei ihrer Punkte wieder durch eine stetige Kurve verbunden werden können — jede stetige Kurve der z-Ebene geht ja in eine stetige Kurve der w-Ebene über —, so ist die Bildmenge ein Gebiet, das gleich-

1) Vgl. S. 69ff.

falls von Windungspunkten frei ist. Außerdem geht jeder genügend kleine schlichte Bereich der z-Ebene in einen schlichten Bereich der w-Ebene über. Denn in dem vorhin eingeführten Kreis K_1 nimmt z. B. $f(z)$ keinen Wert mehrfach an. Damit ist also der Satz von der Gebietstreue bewiesen.

Er bedarf nun noch einer Ergänzung für die Abbildung der Umgebung von Nullstellen der Ableitung. Hier erfolgt die Abbildung auf eine endlichoft gewundene Umgebung des Bildpunktes.

Möge also die Funktion $f(z)$ in der Umgebung von $z = 0$ eindeutig und regulär sein. Bei $z = 0$ besitze $f(z)$ eine n-fache Nullstelle. Dann bildet die Funktion $f(z)$ eine genügend kleine Umgebung von $z = 0$ auf die n-fach gewundene Umgebung von $w = 0$ ab.

Sei nämlich die Funktion

$$w = c_n z^n + \cdots \quad (c_n \neq 0),$$

so setze ich

$$w = t^n.$$

Dann wird

$$t = z\sqrt[n]{c_n + c_{n+1} z + \cdots}.$$

Durch eine der so in der Umgebung von $z = 0$ eindeutig und analytisch erklärten Funktionen $t(z)$ bilde ich die schlichte Umgebung von $z = 0$ auf die schlichte Umgebung von $t = 0$ ab. Diese wird dann durch $w = t^n$ auf die n-blättrige Umgebung von $w = 0$ abgebildet. Mit den Residuenmethoden hatten wir hier nur herausbekommen, daß die Funktion $w(z)$ in der Umgebung von $z = 0$ jeden Wert n-mal annimmt. Das hatte aber zum Beweise unseres Satzes nicht ausgereicht.

Diesen Darlegungen entnimmt man leicht die entsprechenden Tatsachen im Unendlichfernen und in der Umgebung von Windungspunkten. Man sieht auch, wie man den *Bereichbegriff* verallgemeinern muß, wenn man den Satz will aussprechen können, daß durch eine reguläre eindeutige analytische Funktion ein Bereich wieder auf einen Bereich abgebildet wird. Er ist als eine zusammenhängende Punktmenge zu erklären, die zu jedem ihrer Punkte eine ganze Umgebung enthält. Unter *Umgebung* ist dabei ein schlichter oder ein um seinen Mittelpunkt n-mal gewundener Kreis zu verstehen.

Wir gewinnen damit Anschluß an den allgemeinen S. 69 eingeführten Bereichbegriff. Wenn der Leser noch beachtet, was wir unter einer in der Umgebung einer Bereichstelle regulären Funktion verstehen wollten — eine Potenzreihe, die nach ganzen positiven Potenzen des Ortsparamentes fortschreitet —, so wird er unseren Darlegungen leicht den Beweis der Gebietstreue analytischer Abbildungen solch allgemeinster Gebiete entnehmen.

§ 6. Der Satz von der Charakteristik des Randes.

In engem Zusammenhang mit dem Satz von der Gebietstreue analytischer Abbildungen steht der folgende Satz, der vom Charakter der Abbildung am Rande eines Bereiches auf den Verlauf der Abbildung im Inneren zu schließen erlaubt. Der Satz, den ich in dieser Richtung beweisen will, lautet so: *In der z-Ebene sei ein einfach zusammenhangender Bereich B gegeben, dessen Rand von einer einfach geschlossenen rektifizierbaren Kurve $\mathfrak{C}$ gebildet sei. Es sei bekannt, daß durch die im Bereiche und auf seinem Rande reguläre und beschrankte Funktion $f(z)$ diese Kurve auf eine einfache geschlossene Kurve $\mathfrak{C}'$ einer w-Ebene abgebildet wird, welche die w-Ebene in zwei Gebiete, Inneres und Äußeres, zerlegen moge. Dann bildet diese Funktion den Bereich B auf das schlichte Innere von $\mathfrak{C}'$ ab.*

Da zweifellos nach dem Satz von der Gebietstreue nicht alle Bereichpunkte auf Punkte der Kurve $\mathfrak{C}'$ abgebildet werden konnen, so gibt es in einem der beiden von $\mathfrak{C}'$ begrenzten Bereiche Punkte, die der Bildbereich bedeckt. Sei α ein solcher Wert, so gibt das

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overset{\mathfrak{C}}{\curvearrowleft}}\frac{f'(z)}{f(z)-\alpha}\,dz$$

an, wie oft er in B angenommen wird. Dies Integral ist also positiv. Es ist eine stetige Funktion von α. Wenn ich daher α in seinem durch $\mathfrak{C}'$ bestimmten Bereich sich ändern lasse, so muß das Integral dabei unverandert bleiben, denn es besitzt ja stets einen ganzzahligen Wert. Mache ich aber nun die Substitution

$$f(z) = w,$$

so geht das Integral in $\quad\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}'}\frac{dw}{w-\alpha}$

uber, gibt also die Anderung von $\log(w-\alpha)$ bei Durchlaufung der einfach geschlossenen Kurve $\mathfrak{C}'$ an. Dieselbe kann aber nur $\pm 2\pi i$ oder Null sein (S. 80). Daher kommt hier fur den positiven von Null verschiedenen Integralwert nur 1 selbst in Betracht. Daher wird tatsachlich jeder Punkt eines von $\mathfrak{C}'$ begrenzten Bereiches einmal angenommen. Da aber die mit der Regularitat verbundene Stetigkeit von $f(z)$ keine Werte von beliebig großem absoluten Betrage zuläßt, so kommt als Bildbereich tatsächlich nur das Innere in Betracht, das also vom Bildbereich genau einmal bedeckt wird.

§ 7. Die Umkehrungsfunktion.

1. Existenz. Durch unsere Betrachtungen ist nun auch die Existenz analytischer Umkehrungsfunktionen bewiesen. Den ersten unserer Satze können wir nämlich auch so aussprechen: *Wenn die analytische Funktion $w = f(z)$ bei $z = 0$ verschwindet und dort eine nicht verschwindende Ableitung besitzt, so besitzt die Gleichung $w - f(z) = 0$ für jedes w aus einer gewissen Umgebung von $w = 0$ genau eine Losung aus der Umgebung von $z = 0$.* Man kann das präziser so ausdrucken: Es gibt zwei positive Zahlen δ und ε derart, daß die Gleichung $w - f(z) = 0$ fur alle $|w| < \varepsilon$ genau eine Losung aus $|z| < \delta$ besitzt. Und nun kann hinzugefugt werden: *Die so erklärte eindeutige Funktion ist in der Umgebung von $w = 0$ analytisch.* Es genugt, die Differenzierbarkeit an der Stelle $w = 0$ selbst nachzuweisen. Jede andere Stelle erledigt sich ebenso. Es wird namlich einfach

$$\frac{dz}{dw} = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}}.$$

Wenn aber
$$w = c_n z^n + \cdots$$
vorgelegt ist, fuhrt man, wie vorhin, erst $w = t^n$ ein und erhält

$$t = z\sqrt[n]{c_n + c_{n+1}z + \cdots} = z\sqrt[n]{c_n} + \cdots.$$

Diese Gleichung bestimmt z als analytische Funktion von t, die man also nach Potenzen von t entwickeln kann. So erkennt man, daß man z nach Potenzen von t, d h. von $\sqrt[n]{w}$ entwickeln kann.

2. Berechnung. Wie man nun aber die losende Potenzreihe $z(w)$ der Gleichung

$$w = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \text{ mit } a_1 \neq 0$$

wirklich finden kann, soll nun dargelegt werden. Es gelingt durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten. Wir wissen nämlich aus unseren allgemeinen Erorterungen, daß es eine Potenzreihe der Form

$$z = \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \cdots$$

geben muß, welche in der Umgebung von $w = 0$ konvergiert und der Gleichung identisch genugt. Doch es muß für diese Reihe identisch in w

$$w = a_1(\alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \cdots) + a_2(\alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \cdots)^2 + \cdots$$

sein. Nun wissen wir aber aus dem Weierstraßschen Doppelreihensatz, daß man die rechte Seite nach Potenzen von w ordnen darf. So erhält man

$$w = a_1\alpha_1 w + (a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1^2)\, w^2 + (a_1\alpha_3 + 2a_2\alpha_1\alpha_2 + a_3\alpha_1^2)\, w^3 + \cdots.$$

Da dies identisch in w erfüllt sein muß, müssen die Koeffizienten gleicher Potenzen von w rechts und links einander gleich sein. So ergibt sich

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_1}, \quad \alpha_2 = -\frac{a_2\alpha_1^2}{a_1}, \quad \alpha_3 = -\frac{2a_2\alpha_1\alpha_2 + a_3\alpha_1^3}{a_1} \cdots.$$

Man übersieht deutlich, wie in jeden Koeffizienten der Reihe mit jeder folgenden Potenz ein Koeffizient α_n multipliziert mit dem von Null verschiedenen a_1 neu eintritt. So ermöglicht also unser Verfahren die eindeutige Bestimmung der Koeffizienten.

3. Konvergenzradius. Nun wollen wir auf die Frage der Konvergenz noch ein wenig eingehen. Zwar steht durch unsere allgemeinen Betrachtungen schon fest, daß die Reihe in einer gewissen Umgebung von $w = 0$ konvergieren muß. Indessen bieten diese allgemeinen Betrachtungen noch nicht ohne Weiteres[1]) ein Mittel, um eine Vorstellung über die Größe einer solchen Umgebung zu gewinnen. Unser Konvergenzbeweis wird sich auf die Residuenmethoden nicht stützen, so daß wir damit zugleich einen neuen Beweis für die Lösbarkeit unserer Gleichung gewinnen werden. Allerdings tragen die Residuenmethoden insofern weiter, als sie lehren, daß die durch die Potenzreihe dargestellte Lösung die *einzig mögliche ist.* Die Methode, mit welcher wir die Konvergenz beweisen werden, ist die sogenannte *Majorantenmethode.* Die umzukehrende Reihe möge in einem Kreise vom Radius R konvergieren. Dann ist $|a_n| \leqq \frac{M}{R^n}$, wenn $|f(z)| \leqq M$ ist in $|z| < R$. Betrachten wir nun neben der zu lösenden Gleichung die Gleichung

$$w = |a_1|\, z - \frac{M}{R^2} z^2 - \frac{M}{R^3} z^3 \ldots,$$

so ergibt sich, daß die Koeffizienten α_n kleinere absolute Beträge besitzen, als die Koeffizienten der Reihe, welche man bei Auflösung der Hilfsgleichung nach demselben Verfahren gefunden hatte. Die Hilfsgleichung kann aber so geschrieben werden:

1) Man kann indessen die Integraldarstellung (1) von S. 199 für den vorliegenden Fall heranziehen und ihr an Hand der Betrachtungen von S. 198 eine Abschätzung des Konvergenzradius entnehmen. Man findet so nach Landau, der kürzlich diesen Ansatz durchgeführt hat, daß die Umkehrfunktion für $|w| < \frac{R^2|a_1|^2}{6M}$ konvergiert, also ein schlechteres Ergebnis als im Text.

$$w = |a_1| z - \frac{M}{R^2} z^2 \frac{1}{1 - \frac{z}{R}} \quad \text{oder} \quad z^2 \left(|a_1| + \frac{M}{R}\right) - z(w + |a_1| R) + wR = 0.$$

Die Auflosung ergibt

$$z = R \frac{w + |a_1| R + \sqrt{(w + |a_1| R)^2 - 4(|a_1| R + M) w}}{2(|a_1| R + M)}.$$

Die Potenzreihe dieser Funktion konvergiert aber sicher, solange

$$|w| < |a_1| R + 2M - 2\sqrt{M(|a_1| R + M)}$$

ist. Denn für solche w verschwindet der Ausdruck unter der Wurzel nicht. Fur solche w ist also die Losung regulär. Bemerkenswert ist, daß diese fur den Konvergenzradius der Umkehrungsfunktion gefundene Schranke nur von $|a_1| R$ und M abhangt.

Wir haben also folgendes Ergebnis gefunden: *Wenn*

$$w = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

in $|z| < R$ konvergiert, und daselbst $|w| < M$ ist, so ist die inverse Funktion in einem Kreise $|z| < \varrho$ regulär und ihr absuolter Betrag daselbst kleiner als R. Dabei hängt ϱ nur von $|a_1| R$ und M ab.

Das Ergebnis legt die Frage nach den besten, nur von a_1, R und M abhangigen Wert von ϱ nahe. Landau hat kurzlich gezeigt, daß dieser beste Wert

$$P = M\left(\frac{M}{R|a_1|} - \sqrt{\frac{M^2}{R^2 |a_1|^2} - 1}\right)^2$$

ist. In $|w| < P$ ist also die Umkehrungsfunktion stets regular und absolut kleiner als R. Es gibt aber zu jeden $\varepsilon > 0$ Funktionen, deren Umkehrungsfunktion in $|w| < P + \varepsilon$ nicht regular oder nicht kleiner als R ist (vgl Landau, Sitzber. d. preuß Akad d Wiss. 1926, S. 472).

§ 8. Implizite Funktionen.

1. Der einfachste Fall. *Es sei $f(w,z)$ eine stetige Funktion der beiden komplexen Variablen z und w immer dann, wenn z einem gewissen Bereich B_z und w einem Bereich B_w angehort. $z = 0$ und $w = 0$ seien Punkte dieser Bereiche und es sei $f(0, 0) = 0$. In diesen Bereichen sei die Funktion analytisch in z und analytisch in w. Dazu seien die beiden partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial w}$ stetige Funktion von z und w. Ferner sei $\frac{\partial f}{\partial w}(0, 0) \neq 0$. Dann gibt es genau eine analytische Funktion $w(z)$, welche für $z = 0$ verschwindet und welche der Gleichung $f(w,z) = 0$ in der Umgebung von $z = 0$ genügt.*

Die Voraussetzungen dieses Satzes sind z. B. für ganze rationale Funktionen erfüllt, so daß dieser Satz eine Anwendung auf die Lösungen solcher Gleichungen, das sind die algebraischen Funktionen, zuläßt.

$f(w,0)$ hat in einer gewissen Umgebung von $w = 0$ nur die eine einfache[1]) Nullstelle $w = 0$. Da sich nun aber die Funktion $\varphi_z(w) = f(w,z)$ von w mit dem Parameter z stetig ändert, so besitzt nach dem Satz von Rouché S. 190 diese Funktion von w für genügend kleine Werte des Parameters z nur eine Nullstelle. Denn schlägt man bei passend gewähltem $m > 0$ um $w = 0$ einen Kreis vom Radius $\varrho(m)$, auf dem $|f(w,0)| > m$ sei, und in dem $f(w,0)$ nur eine Nullstelle hat, so kann man eine Funktion $\delta(m)$ so bestimmen, daß auf diesem Kreise $|w| = \varrho(m)$ für $|z| < \delta(m)$ stets

$$|f(w,z) - f(w,0)| < m$$

bleibt. Daher hat die Funktion

$$\varphi_0(w) = f(w,z) = f(w,0) + (f(w,z) - f(w,0))$$

in diesem Kreise ebenso viele Nullstellen wie $f(w,0)$, also eine. Also gehört zu jedem solchen $|z| < \delta(m)$ eine einzige Lösung der Gleichung $f(w,z) = 0$, für die $|w| < \varrho(m)$ ist. Diese Lösung ist also eine eindeutige Funktion. Sie ist aber auch analytisch.

Auch dieser Nachweis wird am besten mit der Residuenmethode erbracht. Sie liefert uns auch zugleich die Potenzreihenentwicklung der Lösung.

Es ist nämlich für jedes $|w| = \varrho$ und $|z| < \delta$ die Funktion $f(w,z)$ von Null verschieden. Daher ist hier, d. h. für $|w| = \varrho$, $|z| < \delta$,

$$\frac{w \dfrac{\partial f}{\partial w}(w,z)}{f(w,z)} = \varphi(w,z)$$

eine regulär analytische Funktion von z. Daher wird auch das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \varphi(w,z)\,dw$$

erstreckt über den Kreis $|w| = \varrho$ eine für $|z| < \delta$ reguläre analytische Funktion von z. (S. 174). Diese Funktion ist aber gerade unsere Lösung $w(z)$. Das lehrt die Behandlung dieses Integrales nach der Residuenmethode. Es ist nämlich weiter nichts als das Residuum des Integranden im Kreise $|w| < \varrho$.

1) Sie ist einfach, weil $\dfrac{\partial f}{\partial w}(0,0) \neq 0$ ist.

In diesem Kreise hat aber bei gegebenem z der Integrand eine einzige Singularität, nämlich einen einfachen Pol an der zu diesem z gehörigen Nullstelle $w(z)$ des Nenners. Das Residuum von $\frac{d}{dw}\log f = \frac{1}{f}\frac{df}{dw}$ aber ist nach S. 189 Eins, weil die Nullstelle von $f(w,z)$ einfach ist. Daher wird das Residuum[1]) (Koeffizient der -1-ten Potenz in der Laurententwicklung) von $\varphi(w,z)$ gerade $w(z)$. Daher wird also

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \varphi(w, z)\, dw, \tag{1}$$

wobei das Integral im positiven Sinne über $|w| = \varrho$ zu erstrecken ist. Demnach ist $w(z)$ eine für $|z| < \delta$ reguläre analytische Funktion, welche für $z = 0$ verschwindet. Die gefundene Integraldarstellung erlaubt, auch die Koeffizienten ihrer Potenzreihenentwicklung anzugeben. Damit erhalten wir zugleich noch einen weiteren Beweis für den analytischen Charakter der Lösung. Wir haben weiter nichts zu tun, als den Integranden nach Potenzen von z zu entwickeln und dann nach w zu integrieren. Nun wird

$$\varphi(w, z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\delta} \frac{\varphi(w,\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Da aber
$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \cdots \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} + \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n+1}\frac{1}{\zeta - z}$$
ist,

so wird
$$\varphi(w, z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\delta}\frac{\varphi(w,\zeta)}{\zeta}\, d\zeta + z\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\delta}\frac{\varphi(w,\zeta)}{\zeta^2}\, d\zeta + \cdots$$
$$+ z^n\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\delta}\frac{\varphi(w,\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta + z^{n+1}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\delta}\frac{\varphi(w,\zeta)}{\zeta^{n+1}(\zeta - z)}\, d\zeta.$$

Setzt man nun
$$A_\varkappa = \frac{1}{\varkappa!}\frac{d^\varkappa\varphi}{dz^\varkappa}(w, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\delta}\frac{\varphi(w,\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta,$$

so hat man
$$\varphi(w, z) = A_0 + A_1 z + \cdot \quad + A_n z^n + \frac{z^{n+1}}{2\pi i}\int\frac{\varphi(w,\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}(\zeta - z)}.$$

Tragt man dies in (1) ein, so findet man
$$w(z) = B_0 + B_1 z + \cdots + B_n z^n - \frac{z^{n+1}}{4\pi^2}\int\limits_{|w|=\varrho} dw \int\limits_{|\zeta|=\delta}\frac{\varphi(w,\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}(\zeta - z)}.$$

1) Wir können die Produktregel von S. 178 anwenden, weil sich S. 189 zeigte, daß die logarithmische Ableitung einer regulären Funktion nur einen Pol erster Ordnung besitzt.

Hier ist

$$(2) \qquad B_\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=\varrho} \frac{1}{\varkappa!}\,\frac{d^\varkappa \varphi}{d z^\varkappa}(w, 0)\,dw$$

gesetzt.

$B_\varkappa$ ist also das Residuum von $A_\varkappa$ an der Stelle $w=0$. Das Restintegral aber wird kleiner als $\varrho\cdot\delta\cdot M\,\frac{1}{\delta-|z|}\left|\frac{z}{\delta}\right|^{n+1}$, wenn wir unter M das Maximum des Integranden fur $|\zeta|=\delta$ und $|w|=\varrho$ verstehen. Fur jedes $|z|<\delta$ strebt also dieser Rest mit $\frac{1}{n}$ gegen Null.

Also wird schließlich die Auflosung von $f(w, z) = 0$:

$$w(z) = B_0 + B_1 z + \cdots,$$

wobei die B_n die Ausdrucke (2) sind.

Damit haben wir die Betrachtungen uber die Umkehrungsfunktion im vorigen Paragraphen wesentlich verallgemeinert und zugleich noch eine neue Herleitung der dort gefundenen Resultate gewonnen.

2. Der Weierstraßsche Vorbereitungssatz. Die hier angestellten Uberlegungen erlauben es nun aber auch, den Fall zu behandeln, wo die Gleichung $f(w, z) = 0$ fur $z = 0$ eine mehrfache Wurzel hat, wo also die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial w}(w, 0)$ verschwindet. Das fuhrt zum sogenannten *Weierstraßschen Vorbereitungssatz,* dessen wesentlicher Inhalt sich allerdings schon bei Cauchy findet:

Die Funktion $f(w, z)$ sei fur $|z| < R$ und für $|w| < P$ stetig in w und z und sie sei eine analytische Funktion von z und von w. Es sei $f(0, 0) = 0$. Ferner habe die Gleichung $f(w, 0)$ bei $w = 0$ eine genau n-fache Nullstelle Dann gibt es zwei Zahlen δ und ϱ, so daß fur $|z| < \delta$ und $z \neq 0$ die Gleichung $f(w, z) = 0$ genau n verschiedene Wurzeln $w_1, w_2, \cdots w_n$ hat, für welche $|w_\varkappa| < \varrho$ ist. Diese Wurzeln genügen einer algebraischen Gleichung n-ten Grades $w^n + A_1(z)w^{n-1} + \cdots + A_n(z) = 0$ mit Koeffizienten, welche fur $|z| < \delta$ analytisch sind. Dementsprechend sind die Losungen an allen von 0 verschiedenen Stellen des Kreises $|z| < \delta$ regulare analytische Funktionen, welche nur bei $z = 0$ Verzweigungen aufweisen konnen.

Die Gleichung $f(w, 0) = 0$ habe also eine n-fache Nullstelle $w = 0$. Wir wählen ein $\varrho > 0$ so, daß $f(w, 0) \neq 0$ ist auf $|w| = \varrho$. Dann gibt es ein $m > 0$, so daß $|f(w, 0)| > m > 0$ ist auf $|w| = \varrho$. Alsdann bestimmen wir eine Zahl δ, so daß $|f(w, z) - f(w, 0)| < m$ fur $|w| = \varrho$ und $|z| < \delta$. Das geht wegen der Stetigkeit der Funktion $f(w, z)$. Dann hat nach dem Satz von Rouché S. 190 die Funktion $\varphi_z(w) = f(w, z) = f(w, 0) + \{f(w, z) - f(w, 0)\}$ fur $|z| < \delta$ ebenso viele Nullstellen im Kreise $|w| \leqq \varrho$, wie die Funktion

$f(w, 0)$, also genau n. Die Nullstellen seien $w_1, \cdots w_n$. Dann betrachte ich das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=\varrho} w^{\varkappa}\,\frac{d}{dw}\log f(w, z)\,dw.$$

Darin sei $\varkappa$ eine ganze positive Zahl. Es stellt eine fur $|z| < \delta$ analytische Funktion dar. Andererseits ist es aber gleich der Summe der Residuen des Integranden im Kreise $|w| < \varrho$. Hier hat aber der Integrand n Pole an den n Nullstellen des Nenners. Dementsprechend wird wie vorhin das Residuum $w_1^{\varkappa} + w_2^{\varkappa} + \cdots + w_n^{\varkappa}$ eine analytische Funktion von z fur $|z| < \delta$. In diesem Kreise sind also die Potenzsummen der Wurzeln $w_1 \cdots w_n$ regulare Funktionen von z. Demnach sind auch die elementarsymmetrischen Funktionen der Wurzeln, welche ja nach den Regeln der Algebra ganze rationale Funktionen der Potenzsummen sind, fur $|z| < \delta$ regular analytisch. Demnach genugen die n Wurzeln $w_1 \cdots w_n$ einer algebraischen Gleichung n-ten Grades

$$\Phi(w, z) \equiv w^n + A_1(z)w^{n-1} + \cdots + A_n(z) = 0,$$

deren Koeffizienten gerade diese elementarsymmetrischen Funktionen sind. Damit ist schon der erste Teil unseres Satzes bewiesen. Wir haben nur noch zu bemerken, daß die Entwicklung unseres Integrales nach Potenzen von z wie fruher geleistet werden kann, und daß man so auch die explizite Darstellung der Koeffizienten unserer Gleichung gewinnen kann.

Der zweite Teil unseres Satzes bezieht sich auf die Wurzeln einer solchen Gleichung n-ten Grades. Es soll bewiesen werden, daß diese an jeder von $z = 0$ verschiedenen Stelle einer gewissen Umgebung von $z = 0$ regulare analytische Funktionen sind. Dies ist ohne weiteres klar an jeder Stelle z, an welcher die n Wurzeln der Gleichung $\Phi(w, z) = 0$ voneinander verschieden sind. Denn dann ergibt es sich aus dem ersten Satze dieses Paragraphen. Wenn sich also um die Stelle $z = 0$ ein Kreis $|z| < \delta$ legen laßt, in welchem die n Wurzeln der Gleichung $\Phi(w, z) = 0$, außer bei $z = 0$, voneinander verschieden sind, so ist unser Satz bewiesen. Wenn es aber keinen solchen Kreis gibt, so treten fur beliebig kleine von Null verschiedene z mehrfache Wurzeln unserer Gleichung auf. Also haben fur gewisse beliebig kleine z die beiden Gleichungen $\Phi(w, z) = 0$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial w}(w, z) = 0$ gemeinsame Wurzeln. Eliminiert man nun aus diesen beiden Gleichungen nach den Regeln der Algebra w, so ergibt sich eine in der Umgebung von $z = 0$ regulare analytische Funktion von z.[1]) Diese ver-

1) Diese Funktion ist ja weiter nichts als die Diskriminante unserer Gleichung. Sie ist daher eine ganze rationale Funktion der Potenzsummen, namlich die bekannte Determinante $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{m-1} \\ \vdots & & & \\ s_{m-1} & s_m & \cdots & s_{2m-2} \end{vmatrix}$ und daher wie die Potenzsummen regular.

schwindet an allen den Stellen, wo die Gleichung $\Phi(w, z) = 0$ mehrfache Wurzeln hat. Wir nehmen aber an, daß es beliebig kleine solche z-Werte gebe. Daher muß diese reguläre Funktion — die Diskriminante unserer Gleichung — in einer gewissen Umgebung von $z = 0$ identisch verschwinden. Es gibt daher in einer gewissen Umgebung von $z = 0$ für *alle* z mehrfache Wurzeln. Um sie zu berechnen, hat man nur den größten gemeinsamen Teiler der beiden ganzen rationalen Funktionen von w, nämlich $\Phi(w, z) = 0$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial w}(w, z) = 0$ zu berechnen und mit ihm die gleichen Überlegungen wie mit Φ selbst anzustellen. Sei der größte gemeinsame Teiler etwa Δ, dann schreiben wir $\Phi = \Delta \cdot \Delta_1$ und betrachten nun den Faktor Δ erneut daraufhin, ob er mehrfache Wurzeln hat. Ist dies der Fall, so zerlegen wir erneut, bis wir nur noch Faktoren gefunden haben, die in der Umgebung dieses $z = 0$ lauter einfache Wurzeln besitzen. Nach dem ersten Satze dieses Paragraphen sind diese daher in der Umgebung $z = 0$, außer etwa bei $z = 0$ selbst, reguläre analytische Funktionen. Denn an jeder von $z = 0$ verschiedenen Stelle sind nun die Voraussetzungen des ersten Satzes erfüllt. Bei $z = 0$ selbst können also diese Funktionen singulär sein. Sie sind aber jedenfalls in der Umgebung von $z = 0$ beschränkt und daraus wird sich S. 230 ergeben, daß eine derartige Funktion nur solche Singularitäten haben kann, welche wir dann algebraische Verzweigungspunkte nennen werden.

3. Genauere Durchführung in einem Spezialfall. In einem ziemlich allgemeinen Fall kann man die Rechnung explizite durchführen. Es handle sich um die Auflösung von

$$w - zf(w) = 0$$

nach w. $f(w)$ sei dabei eine in der Umgebung von $w = 0$ reguläre Funktion. $f(w, z)$ ist hier $w - zf(w)$. Also wird $f(w, 0) = w$. Man kann also irgendeinen Kreis $|w| = \varrho > 0$ wählen; auf ihm ist stets $f(w, 0)$ von Null verschieden. Er ist in seiner Größe nur durch die Bedingung eingeschränkt, daß in und auf ihm $f(w)$ regulär sein muß. Dann hat man δ so zu bestimmen, daß $\left|\frac{zf(w)}{w}\right| < 1$ für $|z| < \delta$ und $|w| = \varrho$. Dann besitzt für $|z| < \delta$ die Gleichung $w - zf(w) = 0$ genau eine Lösung $|w| < \varrho$. Man hat also nun zunächst

$$\varphi(w, z) = w \frac{1 - zf'(w)}{w - zf(w)}$$

nach Potenzen von z zu entwickeln. Dann findet man für die oben $A_\varkappa$ genannte Funktion (Koeffizient von $z^\varkappa$)

$$A_\varkappa = \left(\frac{f(w)}{w}\right)^\varkappa - f'(w)\left(\frac{f(w)}{w}\right)^{\varkappa - 1} \quad \text{für} \quad \varkappa \geqq 1 \quad \text{und} \quad A_0 = 1.$$

Der Koeffizient $B_\varkappa$ unserer Lösung wird das Residuum von $A_\varkappa$ an der Stelle

$w = 0$. Um dies zu finden, hat man den Koeffizienten der -1-ten Potenz in der Laurententwicklung von $A_\varkappa$ zu bestimmen. Dazu braucht man einmal den Koeffizienten der $(\varkappa - 1)$-Potenzen in der Potenzreihenentwicklung von $(f(w))^\varkappa$. Der wird

$$\frac{1}{(\varkappa-1)!}\frac{d^{(\varkappa-1)}}{dw^{\varkappa-1}}(f(w))^\varkappa.$$

Ferner benötigt man den Koeffizienten der $(\varkappa - 2)$-ten Potenz in der Potenzreihenentwicklung von $f'(w)(f(w))^{\varkappa-1}$. Der wird

$$\frac{1}{(\varkappa-2)!}\frac{d^{(\varkappa-2)}}{dw^{\varkappa-2}}(f'(w)\cdot f(w)^{\varkappa-1}) = \frac{1}{(\varkappa-2)!}\frac{d^{(\varkappa-1)}}{\varkappa dw^{\varkappa-1}} f(w))^\varkappa.$$

So hat man $B_\varkappa = \frac{1}{\varkappa!}\frac{d^{(\varkappa-1)}}{dw^{\varkappa-1}}(f(w))^\varkappa/_{w=0}$ für $\varkappa \geqq 1$ und $B_0 = 0$.

Die Reihe $w = \sum_1^\infty B_\varkappa z^\varkappa$ löst also die Gleichung $w - zf(w) = 0$. Man nennt sie die *Reihe von Lagrange*.

Zur Bestimmung einer unteren Schranke für den Konvergenzradius geben unsere Darlegungen die folgenden Mittel an die Hand. Man wähle zunächst irgendeine Zahl ϱ so, daß $f(w)$ für $|w| \leqq \varrho$ regulär ist. Alsdann bestimme man δ so, daß für $|z| < \delta$ und $|w| = \varrho$ stets

$$\left|\frac{zf(w)}{w}\right| < 1$$

bleibt. Dies δ ist also durch ϱ bestimmt, und man wird nun ϱ so zu wählen suchen, daß δ möglichst groß genommen werden darf.

4. Die Keplersche Gleichung. Wir wollen ein Beispiel, nämlich die Auflösung der *Keplerschen Gleichung*

$$\zeta = a + z \sin \zeta$$

für *reelle* a behandeln.

Um ihr die vorausgesetzte Form zu geben, setze ich

$$\zeta - a = w$$

und habe also
$$w = z \sin(w + a)$$

aufzulösen. Für $z = 0$ wird $w = 0$, oder $\zeta = a$ eine einfache Wurzel. Also findet man als Lösung

$$\zeta = a + z \sin a + z^2 \frac{1}{2!}\frac{d \sin^2 a}{da} + z^3 \frac{1}{3!}\frac{d^2 \sin^3 a}{da^2} + \cdots$$

Um den Konvergenzkreis zu bestimmen, haben wir den Quotienten

$$\frac{z \sin (w + a)}{w} = \frac{z \sin \zeta}{\zeta - a}$$

zu untersuchen. Die Reihe konvergiert, sobald dieser Quotient einen Betrag kleiner als Eins besitzt. Ich setze $\zeta - a = re^{i\varphi}$ und habe festzustellen, wann

$$\frac{|z|^2 \sin (a + re^{i\varphi}) \sin (a + re^{-i\varphi})}{r^2} < 1 \tag{1}$$

bleibt. Nun wird

$$|\sin (a + r\cos\varphi + ir\sin\varphi)|^2 = \cos^2 (ir\sin\varphi) - \cos^2 (a + r\cos\varphi)$$

$$= \left(\frac{e^{r\sin\varphi} + e^{-r\sin\varphi}}{2}\right)^2 - \cos^2 (a + r\cos\varphi)$$

$$\leqq \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2}\right)^2.$$

Der Quotient (1) ist also sicher dann kleiner als Eins, wenn

$$|z| \frac{e^r + e^{-r}}{2r} < 1$$

ist. Die Reihe konvergiert also für $|z| < \frac{2r}{e^r + e^{-r}}$ und stellt dann eine Wurzel ζ der Keplerschen Gleichung dar, für welche $|\zeta| < r$ ist. Diese Überlegung gilt für beliebige positive r. Um eine numerische Abschätzung des Konvergenzradius der Reihe zu erhalten, wird man nach dem größtmöglichen Wert von $\frac{2r}{e^r + e^{-r}}$ fragen. Um das Maximum dieses Ausdruckes zu bestimmen, hat man seine Ableitung Null zu setzen. Das liefert

$$(e^r + e^{-r}) - r(e^r - e^{-r}) = 0,$$

oder

$$e^{2r}(1 - r) + (1 + r) = 0.$$

Man erkennt leicht, daß diese Gleichung eine Wurzel zwischen Eins und Zwei hat. Die genauere Rechnung liefert

$$r = 1{,}19967 \cdots$$

und dazu gehört

$$|z| \leqq \frac{2r}{e^r + e^{-r}} = 0{,}66274 \cdots$$

Das ist also eine untere Schranke für den Konvergenzradius.

Achter Abschnitt.

Analytische Fortsetzung.

§ 1. Begriff der analytischen Fortsetzung.

1. Berechnung einer Funktion aus einem ihrer Funktionselemente. Wir knupfen an S. 140 an. Dort haben wir festgestellt, daß eine in einem Bereiche analytische Funktion vollig bestimmt ist, wenn man ihre Werte an unendlichvielen Stellen kennt, welche im Bereiche einen Häufungspunkt besitzen. Namentlich also ist sie vollig bestimmt, wenn man sie in einem Teilbereich kennt. Wie aber ist es moglich, sie dann in den ubrigen Punkten von B tatsachlich zu berechnen?

Auch dafur haben wir schon in einem speziellen Fall Belege. S. 137 haben wir gezeigt, daß eine im Bereiche analytische Funktion im ganzen Bereiche verschwindet, wenn sie in einem Teilbereich Null ist. Zum Beweise haben wir uns einer Methode bedient, die von großerer Tragweite ist, als es damals schien. Wir mussen sie nur den veranderten Verhaltnissen anpassen.

Es sei ein erstes Funktionselement, d. i. eine die Funktion in einem Kreise darstellende Potenzreihe, z. B. die Potenzreihenentwicklung um den Punkt a, bekannt. Sie konvergiert im großten um a geschlagenen Kreis, welcher in B Platz hat Sei nun b ein weiterer von a verschiedener Punkt aus diesem Konvergenzkreis. Dann laßt sich $f(z)$ auch nach Potenzen von $z - b$ entwickeln. Die Koeffizienten dieser Entwicklung aber kann man berechnen, wenn man $\mathfrak{P}(z-a)$ kennt. Denn es sind ja bis auf Zahlenfaktoren die Werte der Ableitungen dieser Funktion an der Stelle b. Diese Entwicklung aber konvergiert nun gleichfalls im großten um b geschlagenen Kreis, welcher in B Platz hat. Dieser Kreis aber wird, wie die Fig. 58 zeigt, im allgemeinen uber den ersten hinausgreifen. Damit ist es dann tatsachlich gelungen, die Funktion wenigstens teilweise außerhalb des ersten Kreises zu berechnen, auch wenn ihre Werte vorerst nur im ersten Kreise bekannt waren. So kann man fortfahren und in immer neuen Gebieten die Funktion berechnen. In endlichvielen Schritten kann man so nach jedem vorgegebenen Punkt P des Bereiches B gelangen. Um das einzusehen, haben wir nur P mit a durch eine Kurve zu verbinden, welche ganz in B verläuft. d sei ihr Abstand vom Bereichrand. Um jeden Punkt derselben kann man einen

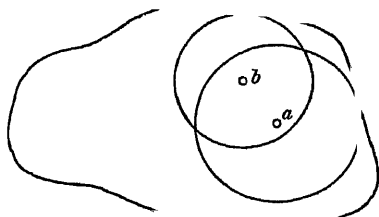



Fig 58

Kreis vom Radius d schlagen, welcher ganz dem Bereiche B angehört. Es kommt nun darauf an, einzusehen, daß man unter diesen Kreisen endlichviele herausgreifen kann, welche eine Kette bilden, die a mit P verbindet. Unter einer *Kette von Kreisen* $K_1, K_2, \cdots K_n$ werden dabei Kreise verstanden, die dadurch ineinandergreifen, daß der Mittelpunkt von K_i dem Inneren von K_{i-1} angehört. Wir sagen, die Kette *verbinde* P *mit* a, wenn a dem ersten und P dem letzten Kreise der Kette angehört. Kennt man die Entwicklung von $f(z)$ im Kreise K_{i-1}, so kennt man sie auch in K_i. Wenn man also eine solche Kette von Kreisen bestimmen kann, so ist man in der Lage, aus der Entwicklung um a tatsächlich die um P zu bestimmen, wenigstens theoretisch. Um aber eine Kette zu finden, betrachte ich die Gleichung $z = z(t)$ der Verbindungskurve. Der Parameter t möge von α bis β laufen, wenn z die Kurve von a bis P beschreibt. Wegen der Stetigkeit dieser Funktion gibt es eine Zahl D von der Art, daß zwei Punkte z_1 und z_2 der Kurve, deren Entfernung $|z_1 - z_2| > \frac{d}{2}$ ist, eine Parameterdifferenz $|t_1 - t_2| > D$ besitzen, wo auch z_1 und z_2 auf der Kurve liegen mögen. Gäbe es nämlich bei gegebenem d beliebig kleine Parameterdifferenzen, so wäre das ein Widerspruch gegen die gleichmäßige Stetigkeit von $z(t)$. Wenn wir dies bedenken, können wir nun leicht unsere Kreiskette konstruieren. Wir beginnen mit dem Kreise um a. In ihm bestimme ich einen Punkt der Kurve: z_1, dessen Entfernung von a das $\frac{d}{2}$ übertreffen möge, aber sonst beliebig gewählt sei. Alsdann bestimmen wir die Entwicklung $\mathfrak{P}(z - z_1)$ der Funktion und bestimmen in ihrem Konvergenzkreis einen Punkt z_2 mit größerem Parameter t, so daß seine Entfernung von z_1 wieder mindestens $\frac{d}{2}$ ist. Dann berechnen wir $\mathfrak{P}(z - z_2)$. So fortfahrend müssen wir nach endlichvielen Schritten einen Kreis erhalten, welcher P enthält, denn nach n-Schritten haben wir ja einen Punkt z_n als Mittelpunkt gefunden, dessen Parameterwert mindestens $\alpha + nD$ beträgt. Das ist aber nur so lange kleiner als β, als $n < \frac{2(\beta - \alpha)}{D} = m$ ist. Also höchstens $[m]$ Schritte sind auszuführen. So kann man also in ganz B die Funktion $f(z)$ berechnen, falls nur eine Potenzreihenentwicklung derselben gegeben ist.

2. Analytische Fortsetzung. Aber nun kann es eintreten, daß die *benutzten Entwicklungen* zum Teil *in Kreisen konvergieren*, die *über* B *hinausreichen.* Wäre z. B. der Ausgangsbereich B mit dem ersten Kreise identisch gewesen, so hätten wir nichtsdestoweniger alle eben bestimmten Entwicklungen auch berechnen können, und wir hätten damit eine Funktion gefunden, die in einem B umfassenden Bereich analytisch gewesen wäre, in B aber mit der gegebenen übereinstimmt. Ist es also möglich, in einem B umfassenden Bereiche eine analytische Funktion $F(z)$ anzugeben, welche in B selbst mit $f(z)$ über-

einstimmt, so nennt man $F(z)$ eine *analytische Fortsetzung* der gegebenen Funktion. Der beschriebene Prozeß enthält gleichzeitig das theoretisch wichtigste Verfahren zur Ausfuhrung derartiger Fortsetzungen. Die einzelnen, durch Potenzreihen dargestellten, also in Kreisen erklärten Funktionen nennt man *Funktionselemente*. Man sagt, ein Element E_1 gehe durch *unmittelbare Fortsetzung* aus dem Element E hervor, wenn der Mittelpunkt e_1 des Elementes E_1 dem Konvergenzkreis von E angehort und wenn $\mathfrak{P}(z - e_1)$ durch Entwicklung von $\mathfrak{P}(z - e)$ nach Potenzen von $z - e_1$ erhalten wird. Man sagt, die Elemente $E_1, E_2, \cdots E_n$ bildeten eine *Kette*, wenn jedes $E_\varkappa$ aus dem vorhergehenden $E_{\varkappa-1}$ durch unmittelbare Fortsetzung entsteht. Man sagt dann auch, die Kette verbinde E_n mit E_1, oder E_n konne durch Fortsetzung von E_1 gewonnen werden.

Nun besteht der folgende leicht zu beweisende Satz:

Wenn es eine Kette gibt, die F mit E verbindet, so gibt es auch eine Kette, die E mit F verbindet. Man kann also auch E durch Fortsetzung von F gewinnen. Es ist offenbar nur notig, den Satz fur eine zweigliedrige Kette zu beweisen. Hier bilden aber die beiden Konvergenzkreise einen Bereich B und die beiden Elemente erklären eine in B analytische Funktion. Vorhin aber haben wir schon gezeigt, daß man jedes Element dieser Funktion mit jedem anderen verbinden kann. Wir verbanden ja vorhin das Element vom Mittelpunkt P mit dem Element vom Mittelpunkt a.

3. Weierstraß' Begriff der analytischen Funktion (im Großen). *Unter einer analytischen Funktion versteht man nun mit Weierstraß die Gesamtheit der Elemente, welche man aus einem derselben durch analytische Fortsetzung erhalten kann. Die Funktion ist durch jedes ihrer Elemente bestimmt*

Auf den ersten Blick mag hier eine Abweichung vom Dirichletschen Funktionsbegriff auffallen. Daß dieser Unterschied aber nur scheinbar ist, wird sofort deutlich, wenn man bedenkt, daß ja die einzelnen Funktionselemente ihren z-Werten w-Werte zuordnen Es sollen aber — das besagt die Definition — nicht beliebige solche Elemente zu einer „analytischen Funktion im Großen" vereinigt werden, sondern nur solche, welche durch Fortsetzung auseinander hervorgehen.

Der Leser halte sich auch klar vor Augen, daß wir bisher den Begriff „analytische Funktion" noch gar nicht erklart hatten, sondern nur den Begriff „in einem gegebenen Bereich analytische Funktion". bisher war also in einem gegebenen Bereich eine Funktion erklart und wir definierten, wann sie in diesem Bereich, d. h. an jeder Stelle dieses Bereiches, analytisch heißen soll. Jetzt ist von einem gegebenen Bereich nicht die Rede.

Ich will noch feststellen, daß der Konvergenzradius der Funktionselemente eine stetige Funktion des Entwicklungsmittelpunktes ist. Sei also $\mathfrak{P}(z - a)$

ein Funktionselement. Wenn sein Konvergenzradius $r(a)$ unendlich sein sollte, so ist auch der Konvergenzradius aller aus ihm durch Fortsetzung entstehenden Elemente unendlich. Wenn aber der Konvergenzradius $r(a)$ endlich ist und man b als neues Entwicklungszentrum wahlt, so konvergiert das Element $\mathfrak{P}(z-b)$ mindestens in einem um b mit dem Radius $r(a) - |b-a|$ geschlagenen Kreise. Wahlt man aber nun b um weniger als den halben Radius $r(a)$ von a entfernt, so ist jedes der beiden Elemente eine unmittelbare Fortsetzung des anderen. Denn jeder der beiden Konvergenzkreise enthält dann den Mittelpunkt des anderen. Es ist sofort klar, daß $r(b)$ nicht großer als $r(a) + |a-b|$ sein kann. Denn dann ware der alte Konvergenzkreis ganz im neuen enthalten, wahrend er doch nicht kleiner sein kann als der große Kreis um $z = a$, der in ihm Platz hat. Ferner aber ist, wie eben wieder benutzt wurde, sicher $r(b) \geqq r(a) - |a-b|$. Daher wird $-|a-b| \leqq r(b) - r(a) \leqq |a-b|$. Daher ist $|r(b) - r(a)| \leqq |a-b|$. Daher ist r eine stetige Funktion des Entwicklungsmittelpunktes. Man kann den Konvergenzradius des Elementes $\mathfrak{P}(z-a)$ den *Regularitatsradius* der Stelle $z = a$ nennen. Denn es ist der Radius des großten um $z = a$ geschlagenen Kreises, in dem die durch $\mathfrak{P}(z-a)$ definierte Funktion regular ist. Analog kann man den *Rationalitatsradius* der Stelle $z = a$ als den Radius des großten um $z = a$ geschlagenen Kreises erklären, in dem die durch eine Laurentreihe $L(z-a)$ mit endlichvielen negativen Potenzen erklärte Funktion von rationalem Charakter ist. Durch ganz analoge Schlusse, die der Leser selbst durchdenken moge, erkennt man, daß auch der Rationalitatsradius eine stetige Funktion des Ortes ist, wofern er nicht unendlich wird Dann aber ist er durchweg unendlich.

Nun sei $\mathfrak{C}$ eine stetige Kurve, die a mit P verbinde. Auf der Kurve mogen die Mittelpunkte einer Folge von Elementen liegen. Die Elemente mogen in dem Sinne durch Fortsetzung auseinander hervorgehen, daß je zwei derselben, deren Mittelpunkte hinreichend wenig voneinander verschieden sind, durch unmittelbare Fortsetzung auseinander hervorgehen. Wenn dies der Fall ist, sagen wir, wir hatten die Funktion *längs der Kurve von a nach P fortgesetzt.* Die Konvergenzradien der Elemente hangen stetig vom Kurvenparameter ab. Sie besitzen daher ein positives Minimum. Das sei d. Man kann nun aus diesen Kreisen eine Kette von Kreisen herausgreifen, welche dieselbe Fortsetzung vom selben Anfangselement zum selben Endelement leisten. Das entnimmt man ohne weiteres der oben schon einmal angewandten Schlußweise, weil man namlich mit jedem Schritt mindestens die dort angegebene Parameterspanne zurücklegt. Die Mittelpunkte der Kreise dieser Kette sind die Ecken eines gewissen Polygones. Man sieht, daß die Fortsetzung langs der Kurve gleichbedeutend ist mit der Fortsetzung langs des Polygones. Denn jede Polygonseite liegt ganz im Inneren eines der Kreise der Kette.

Unsere Betrachtungen geben uns nun die Möglichkeit, einen schönen von *Poincaré und Volterra* herrührenden Satz zu beweisen. Er lautet: *Eine jede analytische Funktion ist abzählbar vieldeutig.* Mit anderen Worten: Die verschiedenen Funktionswerte, welche eine analytische Funktion $f(z)$ einem Argumentwert z zuordnet, bilden eine abzählbare Menge. Oder noch anders ausgesprochen: Wenn man ein gegebenes Funktionselement $\mathfrak{P}(z-a)$ auf allen möglichen Wegen nach ein und demselben Punkt b hin fortsetzt, so erhält man in diesem Punkte eine abzählbare Menge von Funktionselementen $\mathfrak{P}(z-b)$.

Der Beweisgründe sind zweierlei: 1. Haben wir gesehen, daß man jede Fortsetzung von $\mathfrak{P}(z-a)$ nach einem $\mathfrak{P}(z-b)$ durch eine Kette von endlichvielen Funktionselementen gewinnen kann. 2. Bilden die Punkte $z = x + iy$ mit rationalen Koordinaten (x, y) eine abzählbare Menge. Wir werden nun feststellen, daß man jede endliche Kette durch eine andere ersetzen kann, deren Zwischenglieder rationale Mittelpunkte haben. Zwischenglieder, d. h. alle Glieder mit Ausnahme des ersten und des letzten. Denn die Mittelpunkte a und b sind ja gegeben. Wenn aber $a, a_1, a_2, \cdots a_n, b$ die in natürlicher Reihenfolge notierten Glieder einer gegebenen Kette sind, so wähle man einen rationalen Punkt α_1 so nahe an a_1, daß α_1 noch dem Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}(z-a)$ angehört, und daß der Konvergenzkreis des durch unmittelbare Fortsetzung von $\mathfrak{P}(z-a_1)$ erhaltenen Elementes $\mathfrak{P}(z-\alpha_1)$ noch den Punkt a_2 enthält. Das ist möglich, weil wir vorhin sahen, daß die Elementradien stetige Funktionen des Elementmittelpunktes sind. Das so bestimmte Element $\mathfrak{P}(z-\alpha_1)$ ist nun auch unmittelbare Fortsetzung von $\mathfrak{P}(z-a)$, weil $\mathfrak{P}(z-a_1)$ und $\mathfrak{P}(z-a)$ in dem ihren Konvergenzkreisen gemeinsamen Gebiet übereinstimmen, und $\mathfrak{P}(z-a_2)$ ist auch unmittelbare Fortsetzung von $\mathfrak{P}(z-\alpha_1)$, weil $\mathfrak{P}(z-\alpha_1)$ und $\mathfrak{P}(z-a_1)$ in dem gemeinsamen Teil ihrer Konvergenzkreise übereinstimmen. Daher darf das Kettenglied $\mathfrak{P}(z-a_1)$ durch das Element $\mathfrak{P}(z-\alpha_1)$ mit rationalem Mittelpunkt ersetzt werden. Ist das geschehen, so tun wir das gleiche mit $\mathfrak{P}(z-a_2)$. So fortlaufend ersetzen wir alle Zwischenglieder der Kette durch Elemente mit rationalem Mittelpunkt.

Nun schließe ich weiter: Es gibt nur abzählbar viele endliche rationale Ketten, die $\mathfrak{P}(z-a)$ mit einem $\mathfrak{P}(z-b)$ verbinden. Denn eine solche rationale Kette ist durch einen Komplex endlichvieler rationaler komplexen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ gegeben. Die Anzahl n kann natürlich von Komplex zu Komplex sich ändern. Ordne ich die Komplexe nach ihrer Gliederzahl n, so sind das abzählbar viele Möglichkeiten. Betrachte ich alle Komplexe mit fester Gliederzahl, so gibt es abzählbar viele Möglichkeiten für die erste, für die zweite usw. Koordinate. Da aber bekanntlich eine abzählbare Menge von abzählbaren Mengen selbst abzählbar ist, so gibt es tatsächlich nur abzählbar viele rationale Ketten. Da aber durch eine jede Kette das Endelement bestimmt ist, so gibt

es für dasselbe nur abzählbar viele Möglichkeiten. Damit ist der Satz von Poincaré und Volterra bewiesen.

Ich beweise nun weiter den folgenden Satz. *Es gibt Ketten mit abzählbar vielen Gliedern von der Eigenschaft, daß ein jedes Element der Funktion durch unmittelbare Fortsetzung eines Kettengliedes erhalten werden kann.*

Zum Beweise bemerke ich zunächst, daß jedes Element aus einem anderen mit rationalem Mittelpunkt durch unmittelbare Fortsetzung erhalten werden kann. Da es nun aber nur abzählbar viele rationale Punkte gibt und da zu jedem nach dem vorigen Satz nur abzählbar viele Elemente gehören, so gibt es in einer Funktion nur abzählbar viele Elemente mit rationalen Koordinaten. Aus ihnen läßt sich jedes andere durch unmittelbare Fortsetzung erhalten. Nunmehr bringe ich die abzählbar vielen Elemente in irgendeine abgezählte Reihenfolge und verbinde je zwei aufeinanderfolgende durch irgendwelche endlichviele Zwischenglieder zu einer Kette. So erhalte ich eine einzige Kette, die unter anderem auch alle Elemente mit rationalen Mittelpunkten als Glieder enthält, und aus deren Gliedern sich also alle Elemente der Funktion durch unmittelbare Fortsetzung gewinnen lassen.

§ 2. Die Permanenz der Funktionalgleichungen.

1. Die Funktionalgleichung. Unter $f(z, s, t)$ werde eine analytische Funktion einer jeden der drei komplexen Veränderlichen z, s, t verstanden. Sie sei samt ihren ersten Ableitungen für alle Wertetripel z, s, t stetig erklärt, für welche z einem Bereich B_z, s einem Bereich B_s, t einem Bereich B_t seiner Ebene angehört. Wenn dann $\mathfrak{P}_s(z-a)$ und $\mathfrak{P}_t(z-a)$ zwei Funktionselemente sind, welche in der Umgebung von $z = a$ nur Wertepaare aus diesen beiden Bereichen B_s und B_t annehmen, so wird $f(z, \mathfrak{P}_s(z-a), \mathfrak{P}_t(z-a))$ nach S. 34 eine in der Umgebung von $z = a$ reguläre analytische Funktion von z. Es werde angenommen, daß $f(z, \mathfrak{P}_s(z-a), \mathfrak{P}_t(z-a)) = 0$ sei für alle z aus einem gewissen Kreis um $z = a$. Wir wollen dann sagen, die Elemente $\mathfrak{P}_s$, $\mathfrak{P}_t$ genügten der Gleichung $f(z, s, t) = 0$. *Wenn man nun diese beiden Elemente in B_z so analytisch fortsetzen kann, daß dabei Elemente entstehen, welche wieder Wertepaare aus den Bereichen B_s und B_t liefern*[1]*, so ist auch für diese Elemente die Gleichung erfüllt.* Wir drücken diesen Sachverhalt kurz aus, indem wir sagen, eine zwischen zwei Funktionen bestehende analytische Gleichung bleibe bei analytischer Fortsetzung der Funktionen richtig. Wir nennen den so ausgesprochenen Satz den *Satz von der Permanenz der Funktionalgleichungen* bei analytischer Fortsetzung.

1) Damit ist nicht gesagt, daß die Fortsetzung der Elemente $\mathfrak{P}_s$ und $\mathfrak{P}_t$ nicht auch zu Elementen führen kann, die dieser Bedingung nicht genügen.

Er ist leicht zu beweisen. Ich fuhre erst eine bequeme Benennung ein. Unter dem Konvergenzkreis der beiden Elemente $\mathfrak{P}_s$ und $\mathfrak{P}_t$ mit dem gemeinsamen Mittelpunkt a werde der großte Kreis aus B_z verstanden, in dem beide Reihen konvergieren und Wertepaare aus B_s, B_t liefern. Es ist also der kleinere der beiden Konvergenzkreise der einzelnen Elemente. Durch unmittelbare Fortsetzung der beiden Elemente $\mathfrak{P}_s(z-a)$ und $\mathfrak{P}_t(z-a)$ mogen nun die beiden Elemente $\mathfrak{P}_s(z-b)$ und $\mathfrak{P}_t(z-b)$ entstehen. Ihr Konvergenzkreis hat jedenfalls mit dem Konvergenzkreis der beiden Elemente $\mathfrak{P}_s(z-a)$ und $\mathfrak{P}_t(z-a)$ ein Stuck gemeinsam. In diesem gemeinsamen Stuck genügen also die neuen Potenzreihen der Gleichung, wenn ihr die alten genugen. Nun ist aber $f(z, \mathfrak{P}_s(z-b), \mathfrak{P}_t(z-b))$ in dem neuen Konvergenzkreis analytisch und verschwindet in den eben genannten Bereich. Daher verschwindet $f(z, s, t)$ auch in dem Konvergenzkreis der neuen Elemente durchweg, denn darin ist ja $f(z, \mathfrak{P}_s, \mathfrak{P}_t)$ nach S. 34 analytisch. Damit ist schon erkannt, daß bei unmittelbarer Fortsetzung die Funktionalgleichung richtig bleibt. Da aber jede analytische Fortsetzung durch eine Kette von Funktionselementen geleistet wird, wird, so bleiben also Funktionalgleichungen bei beliebiger Fortsetzung richtig.

2. Beispiel. Wir betrachten ein Beispiel. $w = \log z$ ist eine analytische Funktion in dem im vorigen Paragraphen angegebenen Sinne. Als wir S. 79 diese Funktion betrachteten, mußten wir uns noch vorsichtig ausdrucken. Damals hatten wir erst den Begriff einer in einem Bereiche eindeutigen analytischen Funktion zur Verfugung. Allerdings schwebte uber unseren Darlegungen schon damals der allgemeine jetzt eingefuhrte Begriff. Wir verfolgten namlich den $\log z$ langs Kurven, welche den Nullpunkt umschlossen, und sahen, wie man so von einer Bestimmungsweise, von einem Zweig der Funktion, zu den ubrigen gelangen kann. Fur unseren jetzigen Standpunkt bedeutet das nichts anderes, als daß die Funktionselemente $w(z)$, welche man durch Fortsetzung langs solchen Kurven aus einem Ausgangselement erhalt, alle der Gleichung $z = e^w$ genugen, weil eben diese Gleichung bei analytischer Fortsetzung erhalten bleibt. Die Gesamtheit der Funktionselemente, welche dieser Gleichung genugen, gehoren alle einer einzigen analytischen Funktion an, weil man, wie unsere fruheren Betrachtungen lehren, jedes aus jedem anderen durch analytische Fortsetzung erhalten kann. In dieser Richtung liegt also die *Begriffs*bestimmung einer *mehrdeutigen analytischen Funktion.* Die ist nicht erklart als irgendein Sammelsurium von Funktionslementen; nicht jede Menge von Funktionselementen, die in Teilkreisen von B erklart sind, machen eine in diesem Bereiche mehrdeutige Funktion aus, sondern nur diejenigen derselben gehoren derselben Funktion an, welche auseinander durch Fortsetzung erhalten werden konnen. Die Gesamtheit der Funktionselemente $w(z)$ z. B., welche der Gleichung $w^2 - z^2 = 0$ genugen, machen keine analytische Funktion aus, son-

dern deren zwei. Die Gleichung $w^2 - z^2 = 0$ ist ja gleichbedeutend mit der Gleichung

$$(w - z)(w + z) = 0.$$

Für jedes Element wird also entweder der erste oder der zweite Faktor verschwinden. Wenn für ein Element der erste Faktor verschwindet, so verschwindet er auch für alle Elemente, die aus ihm durch Fortsetzung hervorgehen. Niemals wird also dadurch ein Element erhalten, für das der zweite Faktor verschwindet. Diejenigen vielmehr, für die dies zutrifft, hängen auch untereinander durch Fortsetzung zusammen, bilden also eine zweite analytische Funktion. Anders ist es bei $z = w^2$. Alle Funktionselemente, die dieser Gleichung genügen, bilden eine einzige Funktion. Zu jedem Mittelpunkt $z = a$ gehören ja zwei durchs Vorzeichen unterschiedene Elemente, die der Gleichung genügen. Führt man aber die Fortsetzung auf einem Kreise um $z = 0$ aus, d. h. läßt man ein Funktionselement längs dieser Kurve wandern, so gelangt man von dem einen zum anderen. Dazu kann jedes Element mit dem Mittelpunkt $z = a$ in ein Element mit dem Mittelpunkt $z = b$, wie der auch angenommen sei, fortgesetzt werden. Wie das zu machen sei, haben wir zu Beginn von § 1 ausführlich dargelegt. Demnach bilden tatsächlich alle diese Elemente eine analytische Funktion. Nächstens werden wir ein Kennzeichen dafür, daß gewisse Elemente eine analytische Funktion bilden, darin erkennen, daß sie alle einer zusammenhängenden Riemannschen Fläche angehören. So haben wir ja in den Riemannschen Flächen von $\log z$ und $\sqrt{z}$ zusammenhängende Gebilde kennengelernt.

3. Anwendungen. a) $w = f(z)$ sei eine analytische Funktion, $z = \varphi(w)$ sei ein Funktionselement, das der Gleichung $w = f\{\varphi(w)\}$ genügt. Die durch das Element $z = \varphi(w)$ bestimmte analytische Funktion heißt Umkehrungsfunktion von $w = f(z)$. Wir betrachten alle Elemente $a_0 + a_1(z - a) + \cdots$ mit $a_1 \neq 0$ von $f(z)$ und wollen beweisen, daß man durch Umkehrung derselben alle und nur die Elemente $b_0 + b_1(w - a_0) + \cdots$ von $\varphi(w)$ erhält, für die $b_1 \neq 0$ ist. Durch Umkehrung eines Elementes $a_0 + a_1(z - a) + \cdots = w$ mit $a_1 \neq 0$ erhält man nach S. 195ff. eine Potenzreihe $z = a + \frac{1}{a_1}(w - a_0) + \cdots$, die in einer Kreisscheibe um $w = a_0$ konvergiert und dort jeden Wert aus einer gewissen Kreisscheibe K um $z = a$ genau einmal annimmt. Setzt man nun das erste Funktionselement von $f(z)$ unmittelbar fort, indem man den neuen Entwicklungsmittelpunkt in K wählt, und so daß dort wieder $f'(z) \neq 0$ ist, so erhält man durch Umkehrung dieses zweiten Funktionselementes ein Funktionselement, das auch unmittelbare Fortsetzung des ersten Elementes von $\varphi(w)$ ist. Man kann aber jede Kette von Funktionselementen von $f(z)$ durch Einschaltung weiterer Funktionselemente so einrichten, daß jedes Element der

Kette zu seinem Vorganger in der eben angegebenen Beziehung steht. Sind dann zwei Umkehrungselemente der Elemente von $f(z)$ gegeben, so verbinde man ihre Umkehrungselemente, also zwei Elemente von $f(z)$ durch eine Kette der oben angegebenen Art. Dann folgt, daß auch die beiden Umkehrungselemente durch analytische Fortsetzung auseinander hervorgehen. Der Leser denke die eben gemachten Andeutungen vollstandig durch.

b) Wenn $\mathfrak{P}'(z-a)$ die Ableitung des Elementes $\mathfrak{P}(z-a)$ ist, so sind die Fortsetzungen von $\mathfrak{P}'$ die Ableitungen der Fortsetzungen von $\mathfrak{P}(z-a)$. Das erkennt man ohne weiteres durch Betrachtung einer unmittelbaren Fortsetzung von $\mathfrak{P}(z-a)$. Der Leser moge es selbst näher durchuberlegen.

c) Wenn das Element $w = \mathfrak{P}(z-a)$ der Differentialgleichung $f(w', w, z) = 0$ genugt, so genugen ihr auch alle Fortsetzungen von $\mathfrak{P}(z-a)$. Denn wenn $f(\mathfrak{P}'(z-a), \mathfrak{P}(z-a), z) \equiv 0$ ist, so ist dies nach dem Permanenzsatz auch bei Fortsetzung der Elemente $\mathfrak{P}'(z-a)$ und $\mathfrak{P}(z-a)$ noch richtig. Dabei bedeutet w' die Ableitung von w, und es ist anzunehmen, daß man aus dem Regularitatsgebiet der Funktion $f(W, w, z)$ nicht herauskommt.

§ 3. Riemannsche Felder.

Es ist leicht, von der analytischen Fortsetzung aus zu den Riemannschen Flachen zu gelangen.

1. Anschauliches. Wir wollen erst eine etwas anschauliche Beschreibung geben, um dann zur begrifflichen Fassung vorzudringen. Wir denken uns die Konvergenzkreise der Elemente einer analytischen Funktion aus Papier ausgeschnitten. Zwei solche Elemente, die durch unmittelbare Fortsetzung auseinander hervorgehen, denken wir uns in dem gemeinsamen Stuck aneinandergeklebt. Ebenso verfahren wir mit Elementen, die in einem Bereichstuck ubereinandergreifen und darin die gleichen Funktionswerte liefern. Bloßes Ubereinandergreifen veranlaßt also noch nicht zum Verkleben. Es muß noch Ubereinstimmung in den durch die Elemente gelieferten Funktionswerten hinzukommen. Durch das Aneinanderkleben entsteht eine Flache, deren Punkte oder Stellen durch Angabe ihrer z-Koordinate und durch Angabe eines Funktionselementes bestimmt sind. Weder die z-Koordinate allein, noch der Funktionswert allein bestimmen also die Stelle, denn bei mehrdeutigen Funktionen gehoren zur selben z-Koordinate als Mittelpunkt mehrere Elemente. Auch die z-Koordinate zusammen mit dem da angenommenen Funktionswert bestimmen die Stelle der Flache nicht eindeutig, weil es denkbar ist, daß zwei Elemente zwar in ihrem Mittelpunkt denselben Wert liefern, in den Nachbarpunkten aber voneinander abweichen. Man kann sich ja Potenzreihen denken, die in einigen Anfangsgliedern übereinstimmen, dann aber voneinander abweichen.

2. Begriff des Riemannschen Feldes. Die hiermit angeregte Vorstellung soll nun zum *Begriff* des Riemannschen Feldes verdichtet werden.

Unter einer *Stelle* des Riemannschen Feldes einer analytischen Funktion verstehen wir den Inbegriff $\{a, \mathfrak{P}(z-a)\}$ aus einem Element der Funktion und der Koordinate a des Mittelpunktes seines Konvergenzkreises. a heißt die z-Koordinate, $\mathfrak{P}(z-a)$ die *Elementkoordinate* oder auch das *bestimmende Element* der Stelle. Die Gesamtheit der Stellen, zu welchen so die Elemente einer Funktion Anlaß geben, machen das *Riemannsche Feld* der Funktion aus. Dieses Feld besitzt *Gebietscharakter*. Um das zu belegen, definiere ich den Begriff „*Umgebung einer Stelle des Feldes*". Darunter versteht man eine gewisse Menge von Stellen, die der folgenden zweifachen Bedingung genügen: daß erstens ihre z-Koordinaten einer Umgebung von $z = a$ angehören, daß zweitens ihre bestimmenden Elemente durch unmittelbare Fortsetzung der Elementkoordinate jener Stelle entstehen. Jede Stelle des Feldes besitzt somit eine Umgebung. Damit ist die eine Gebietseigenschaft nachgewiesen.

Um auch die zweite nachzuweisen, muß der Begriff der auf dem Feld verlaufenden stetigen Kurve erklart werden. Man denke sich eine stetige Kurve $z = z(t)$ der z-Ebene, die $z = a$ mit $z = b$ verbindet. Alsdann setze man das Element $\mathfrak{P}(z-a)$ langs der Kurve fort; falls dies bis zu $z = b$ hin moglich ist, und falls man dabei zu dem Element $\mathfrak{P}(z-b)$ gelangt, dann sage ich, die Stellen $\{z(t), \mathfrak{P}_t(z-z(t))\}$ bildeten eine auf dem Feld gelegene stetige Kurve, welche die Stellen $\{a, \mathfrak{P}_a(z-a)\}$ und $\{b, \mathfrak{P}_b(z-b)\}$ miteinander verbindet. Aus dem Begriff der analytischen Funktion ergibt sich sofort, daß man je zwei Stellen auf diese Weise verbinden kann. Damit ist die zweite Gebietseigenschaft des Feldes erkannt.

Wir sagen weiter, $w(z)$ sei eine in der Umgebung der Stelle $\{a, \mathfrak{P}(z-a)\}$ des Feldes erklarte Funktion, wenn den Stellen dieser Umgebung Werte von $w(z)$ zugeordnet sind. So ist also z. B. z selbst in der Umgebung einer jeden Stelle des Feldes eindeutig erklart. Ebenso ist $\mathfrak{P}(z-a)$ eine in jeder Umgebung der Stelle $\{a, \mathfrak{P}(z-a)\}$ erklarte Funktion des Feldes. Eine so erklärte Funktion heißt stetig oder analytisch, wenn sie, als Funktion der z-Koordinate der Feldpunkte aufgefaßt, stetig oder analytisch ist.

Die eben uber die Funktion z gemachte Bemerkung lehrt uberdies, daß die Riemannschen Felder funktionentheoretische Bereiche sind im Sinne der S. 69 gegebenen Definition[1]), daß also namentlich die eben erklärten Umgebungen den dort aufgezahlten Umgebungsaxiomen genugen.

Der damit eingefuhrte Begriff des Feldes wird noch in zwei Richtungen eine gewisse Verallgemeinerung erfahren. Einmal durch Hinzunahme von

1) Der Leser moge das selbst weiter durchdenken, um so jetzt eindringlich Kenntnis von jenen Darlegungen zu nehmen.

unendlichfernen Stellen und dann durch Hinzunahme von Polen der Funktion. Um eine Funktion $f(z)$ in der Umgebung des unendlichfernen Punktes zu untersuchen, betrachtet man $f\left(\frac{1}{z}\right)$ in der Umgebung von $z = 0$, wie uns dies seit S. 49 geläufig ist. Um die Unendlichkeitsstellen zu untersuchen, betrachtet man $\frac{1}{f(z)}$. Die Kombination von beidem, also die Betrachtung von $\frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}$ führt zur Untersuchung von unendlichfernen Polen. Wenn z. B. die Fortsetzung einer Funktion längs eines bestimmten Weges zwar bis zur Stelle $z = a$ hin möglich ist, aber bei Annäherung an diese Stelle die Konvergenzradien gegen Null streben, dann ist die Fortsetzung in diese Stelle hinein und darüber hinaus nicht möglich, wohl aber ist es denkbar, daß man bei Fortsetzung der Funktion $\frac{1}{f(z)}$ längs des in der Umgebung von $z = a$ gelegenen Wegestückes mehr Erfolg hat, daß diese Fortsetzung zu einem Element $\mathfrak{P}(z - a)$ der Funktion $\frac{1}{f(z)}$ hinführt. Dann hat nach S. 49 $f(z)$ dort einen Pol. Wir ergänzen dann unser Feld durch die Polstellen $\left\{a, \frac{1}{\mathfrak{P}(z-a)}\right\}$. Ganz analog verfahren wir mit den unendlichfernen Punkten. Man kann diesen Verhältnissen auch in der Benennung Rechnung tragen, indem man etwa von einem *Regularitätsfeld* im Gegensatz zu dem *Rationalitätsfeld*, d. h. dem Feld der Stellen rationalen Charakters redet und das Feld der endlichen Stellen von dem unendlichen Feld unterscheidet. Der Begriff „Umgebung eines Poles“ wird weiterhin noch erklärt werden.

§ 4. Singuläre Stellen.

1. Singuläre Ketten. Unter einer Kette von Funktionselementen verstehen wir eine Folge von Funktionselementen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots$ derart, daß jedes $\mathfrak{P}_n$ durch unmittelbare Fortsetzung des vorhergehenden $\mathfrak{P}_{n-1}$ entsteht. Bisher haben wir nur endliche Ketten betrachtet und gelangten durch sie von jedem Ausgangselement zu jedem anderen Element der gegebenen Funktion hin. Nunmehr sollen auch unendliche Ketten herangezogen werden.

Die Mannigfaltigkeit der hier an und für sich möglichen Fälle ist außerordentlich groß, können doch die Häufungspunkte der Elementmittelpunkte wahllos über die Ebene verteilt sein, und kann man doch auch unendliche Ketten verwenden, um zu Elementen zu gelangen, die man durch endliche Ketten ebensogut, ja, besser erreichen kann. Bei dieser Lage der Dinge wird es gut sein, zunächst die Menge der zu berücksichtigenden unendlichen Ketten einer gewissen Einschränkung zu unterwerfen. Wir wollen einmal voraussetzen, daß die Konvergenzradien der Elemente gegen Null streben. Anderenfalls nämlich würden wir über das schon durch endliche Ketten Erreichbare

im allgemeinen nicht hinauskommen. Weiter sei vorausgesetzt, daß die Elementmittelpunkte einer bestimmten Grenzlage zustreben.[1]) Nur wenn diese Grenzlage der unendlichferne Punkt ist, müssen wir die erste Bedingung dahin abändern, daß die entsprechenden Elemente der Funktion $f\left(\frac{1}{z}\right)$ Konvergenzradien besitzen, welche gegen Null konvergieren. Wenn man beide Fälle in einer einheitlichen Definition zusammenfassen will, so bleibt nichts anderes übrig, als durch stereographische Projektion von der komplexen Ebene zur Zahlenkugel überzugehen. Diese Sorte von unendlichfernen Ketten wird uns zum Begriff der *singulären Stelle* einer analytischen Funktion führen.

Unter einer singulären Kette verstehe ich also eine Kette von Funktionselementen, deren Mittelpunkte einen einzigen Häufungspunkt besitzen, und deren Konvergenzradien (auf der Kugeloberfläche gemessen) gegen Null konvergieren.

2. Singuläre Stellen. Wir setzen weiter fest: *Eine jede singuläre Kette bestimmt eine singuläre Stelle der analytischen Funktion, aus deren Elementen die Kette besteht.*

Wir sagen also nicht, daß wir unter einer singulären Stelle eine singuläre Kette *verstehen* wollen, weil wir dem Umstand Rechnung tragen müssen, daß verschiedene singuläre Ketten dieselbe singuläre Stelle bestimmen, z. B. wird es ja bei der Definition der singulären Stellen auf die Anfangselemente der bestimmenden Ketten gar nicht ankommen. Unsere erste Aufgabe wird es daher sein, festzusetzen, unter welchen Umständen zwei singuläre Ketten dieselbe singuläre Stelle bestimmen sollen. Wir werden bei der Wahl dieser Festsetzungen den Erfahrungen Rechnung tragen müssen, welche wir bei früheren Beispielen, namentlich in Kap. 5 gesammelt haben. Sei etwa h der Häufungspunkt der Elementmittelpunkte der Kette. Dann heißt h die *z-Koordinate der singulären Stelle.* Wir schlagen um h irgendeinen Kreis. Betrachten wir nun die Elemente $P_1, P_2 \cdots$ der Kette, so gibt es eine Nummer n derart, daß

1) Wenn die Mittelpunkte der Elemente $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ zwar einer Grenzlage a zustreben, die Radien der Elemente aber nicht den Grenzwert Null haben, so gibt es ein Element $\mathfrak{P}(z-a)$ derart, daß alle Elemente der Kette mit hinreichend großer Nummer durch unmittelbare Fortsetzung von $\mathfrak{P}(z-a)$ erhalten werden können. Denn dann gibt es eine Zahl $\varepsilon > 0$, die durch die Konvergenzradien passend gewählter Elemente $\mathfrak{P}_n$ von beliebig großer Nummer: $\mathfrak{P}_{\nu_1}, \mathfrak{P}_{\nu_2} \ldots$ übertroffen wird. Von einer gewissen Nummer, etwa ν_1, an sind aber die Mittelpunkte aller Elemente um weniger als $\frac{\varepsilon}{2}$ von a entfernt, so daß also a den Konvergenzkreisen der eben erwähnten Elemente angehört. Ich greife $\mathfrak{P}_{\nu_1}$ heraus. Sein Konvergenzkreis enthält den Punkt a. Somit kann ich als unmittelbare Fortsetzung von $\mathfrak{P}_{\nu_1}$ ein Element $\mathfrak{P}(z-a)$ einführen, dessen Konvergenzradius mindestens $\frac{\varepsilon}{2}$ beträgt. Ihm gehören die Mittelpunkte aller auf $\mathfrak{P}_{\nu_1}$ folgenden Elemente an. Sie sind somit lauter unmittelbare Fortsetzungen dieses Elementes $\mathfrak{P}(z-a)$.

sämtliche Kettenglieder, deren Nummer n übertrifft, Mittelpunkte besitzen, deren Koordinaten diesem Kreis angehören. Die Kette $P_n, P_{n+1} \cdots$ verläuft also ganz im Kreise. Wir nennen sie ein *Ende der singulären Kette.* Wir setzen ihre Elemente auf alle möglichen Weisen längs Wegen fort, die den eingeführten Kreis nicht verlassen. Die Gesamtheit der so erhaltenen Elemente macht eine *Umgebung des Kettenendes* aus. Wir setzen nun fest, daß *dann und nur dann zwei singuläre Ketten dieselbe singuläre Stelle bestimmen, wenn jedes Paar von Enden derselben eine gemeinsame Umgebung besitzt. Diese gemeinsame Umgebung heißt Umgebung der singularen Stelle.*

Zur Bezeichnung und Bestimmung einer singularen Stelle reicht eine dieser Ketten aus. Wir nennen sie die Ketten- oder die *Elementkoordinate der singulären Stelle* zum Unterschied von ihrer z-Koordinate, d. i. der Häufungspunkt der Kettenmittelpunkte

Eine jede Umgebung einer singularen Stelle bestimmt ein Stück des Riemannschen Feldes.

Man erkennt die weitgehende Analogie, die zwischen der Definition des Randpunktes eines Bereiches und unserer Definition der singularen Stelle besteht. Auch hier handelt es sich darum, den Begriff Häufungsstelle von inneren Stellen des Feldes zu erklären. Nur sind es nicht beliebig nebeneinander gestellte Feldstellen, die eine Kette ausmachen

Die engste Analogie weist aber unsere Begriffsbildung zum Begriff des *erreichbaren Randpunktes* eines schlichten Bereiches auf. Das sind diejenigen Randpunkte, nach welchen man aus dem Bereich einen aus endlich- oder unendlichvielen Strecken bestehenden ganz im Bereich verlaufenden Polygonzug legen kann. Hier ist dieser Polygonzug durch die Verbindungsstrecken gegeben, welche die Mittelpunkte der Kettenglieder verbinden Die Verhältnisse sind nur hier insofern nicht ganz die gleichen, als bei den mehrblättrigen Flächen nicht von vornherein Punkte zur Verfügung stehen, die dann noch als Randpunkte zu charakterisieren wären. Es stehen eben nur die (inneren) Stellen des Feldes zur Verfügung. Ein Stück desselben ist also eine jede Umgebung einer singularen Stelle.

3. Einteilung der singulären Stellen. Wenn eine singulare Stelle eine schlichte Umgebung besitzt, deren Stellen durch ihre z-Koordinaten eindeutig bestimmt sind, so sagen wir, die singulare Stelle sei *eindeutiger Natur.* Sonst sagen wir, sie sei *mehrdeutig.* Unter den eindeutigen Singularitäten spielen die *isolierten* eine besondere Rolle. Bei denselben füllen die z-Koordinaten der schlichten Umgebung einen vollen Kreis mit Ausnahme der z-Koordinate der singulären Stelle selbst. Wenn dazu noch die reziproke Funktion $\frac{1}{f(z)}$ in diesem

Kreise beschränkt ist, so liegt ein Pol vor, im anderen Falle haben wir es mit einer wesentlich singularen Stelle zu tun.

Unter den mehrdeutigen Singularitaten spielen die *endlichvieldeutigen* eine wichtige Rolle. Unter diesen wieder sind die *vollig m-deutigen* wichtig. Bei ihnen entsprechen *jeder z-Koordinate* einer nicht zu großen Umgebung genau m verschiedene Feldstellen der Umgebung. Fuhrt man dann $\sqrt[m]{z-h}=t$ in der Umgebung dieser Stelle mit der z-Koordinate h[1]) als neue Variable ein, so wird $f(h+t^m)$ in der Umgebung von $t=0$ eindeutig. Ist diese Funktion dort namentlich regulär oder wenigstens vom Charakter einer rationalen Funktion, so lag eine *algebraische Singularität,* ein m-blattriger algebraischer Verzweigungspunkt vor.

4. Singuläre Stellen auf dem Konvergenzkreis. Naheres uber diese hiermit erst ganz kurz angedeuteten Dinge sollen die beiden nächsten Paragraphen enthalten. Diesen wollen wir mit dem Beweis eines allgemeinen und beruhmten S a t z e s schließen:

Auf dem Konvergenzkreis eines jeden Funktionselementes liegt mindestens eine singuläre Stelle der Funktion, zu welcher das Element gehort. Um uns den Sinn dieser Behauptung ganz klarzumachen, betrachten wir diejenigen aus der Fortsetzung des vorgelegten Elementes entstehenden Ketten, deren Mittelpunkte langs einem Radius gegen die Peripherie des Konvergenzkreises unseres Elementes konvergieren, und deren Mittelpunkte diesem Konvergenzkreis angehoren. Dann behauptet unser Satz, daß es unter diesen radialen Ketten mindestens eine singulare gibt, daß also langs mindestens eines Elementradius die Konvergenzradien der Kettenglieder gegen Null streben. Alle gehen durch unmittelbare Fortsetzung aus dem Ausgangselement hervor. Der Satz kann auch dahin ausgesprochen werden, daß es mindestens ein durch unmittelbare Fortsetzung entstehendes Element gibt, dessen Konvergenzkreis den des gegebenen Elementes beruhrt. Der Beruhrungspunkt liefert dann die z-Koordinate der singularen Stelle, und die zu diesem Beruhrungspunkt gehorige radiale Kette liefert die Kettenkoordinate der singularen Stelle. Nehmen wir namlich im Gegenteil an, die Konvergenzradien einer jeden radialen Kette streben bei Annaherung an den Rand des Konvergenzkreises unseres Ausgangselementes nicht gegen Null. Dann besitzen dieselben, da die Konvergenzradien sich stetig mit dem Mittelpunkt andern, auf jedem Radius eine positive untere Grenze. Daher leuchtet ein, daß man durch eine endliche Kette längs dieses Radius unser Element bis zu dem Endpunkt des Radius fortsetzen kann. Dies wäre dann längs eines jeden Radius moglich, und jeder Peripheriepunkt würde Mittelpunkt eines Elementes, dessen Konvergenzkreis mit dem des vorge-

1) Fur den Fall, daß $h=\infty$ ist, hat man $\sqrt[m]{\frac{1}{z}}$ zu nehmen.

legten ein Bereichstuck gemeinsam hätte, in dem beide dieselben Funktionswerte liefern. Da aber die Radien dieser Elemente sich wieder längs der Kreisperipherie stetig ändern, liegen sie alle oberhalb einer positiven Schranke d und bedecken daher mit dem Konvergenzkreis des vorgelegten Elementes zusammen einen Kreis vom Radius $d + r$, wenn r der Radius des vorgelegten war. In diesem stellten unsere Elemente eine eindeutige regular analytische Funktion dar. Daher mußte die vorgelegte Reihe nach S. 139 in einem großeren als dem vorgelegten Kreise konvergieren.

Dieser Satz uber den Konvergenzkreis ist ein bequemes Mittel, um vielfach bei der Entwicklung gegebener Funktionen in Potenzreihen schon ohne vorherige Kenntnis ihrer Koeffizienten die Große des Konvergenzradius anzugeben. Es ist eben der Abstand des Entwicklungsmittelpunktes vom nachsten singulären Punkte der Funktion. Soll man z. B. $\sqrt{z}$ in der Umgebung von $z = a$ entwickeln, so wird $|a|$ der Konvergenzradius, denn $z = 0$ ist der einzige endliche singuläre Punkt. Bei der Entwicklung von $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ nach Potenzen von z ist der Konvergenzradius durch den kleineren der Werte $|a|$ oder $|b|$ gegeben. Nach dieser Regel bestimmt man auch in allen S. 160ff. gegebenen Beispielen mit Leichtigkeit den Konvergenzradius.

§ 5. Die Singularitäten der eindeutigen Funktionen.

Zunachst moge sich der Leser wieder die Betrachtungen von S. 148ff. uber isolierte eindeutige Singularitaten ins Gedachtnis zuruckrufen.

Die singularen Stellen konnen noch ganz anderer Art sein als die damals betrachteten. Sie konnen auch ganze Kurven erfullen Z. B. lassen sich Funktionselemente mit endlichem Konvergenzkreis angeben, die uber ihren Konvergenzkreis hinaus nicht fortgesetzt werden konnen. Dann ist also im Sinne der S. 216 gegebenen Definition jede Stelle der Peripherie eine singuläre Stelle der Funktion. Das einfachste Beispiel ruhrt von Weierstraß her. Es ist die Reihe

$$\sum a^n z^{b^n}.$$

a sei hier eine positive, b eine positive ganze Zahl > 1. Der Konvergenzkreis ist der Einheitskreis. Denn

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{n}{b^n}} = 1.$$

Vom n-ten Glied an haben alle Exponenten den größten gemeinsamen Teiler b^n. Da die Summe der ersten Glieder als ganze rationale Funktion keinen Einfluß auf die Lage der Singularitäten hat, so will ich annehmen, α sei eine Singularität von

$$\sum_{n=m,\dots} a^n z^{b^n} = f(z)$$

auf der Konvergenzgrenze. Die Funktion kann dann auf dem nach dieser Stelle zielenden Radius nicht über diese Stelle hinaus fortgesetzt werden. Mache ich aber nun die Substitution

$$z = z' e^{\frac{2 i \pi h}{b^m}} \quad (h = 0, 1 \ldots),$$

so wird

$$f(z) = f(z').$$

Die Funktion geht also bei Drehung der z-Ebene um den Winkel $h \frac{2 i \pi}{b^m}$ in sich über. Daher sind alle Stellen, die bei diesen Drehungen aus α entstehen, also die b^m Stellen $\alpha e^{h \frac{2 i \pi}{b^m}}$ auch singuläre Stellen der Funktion $\sum a^n z^{b^n}$. Diese Überlegungen kann ich aber für jedes m anstellen. Daraus folgt, daß die singulären Stellen auf der Konvergenzgrenze überall dicht liegen. Denn je größer ich m wähle, um so kleiner wird der Winkelunterschied zweier Singularitäten. Da aber Häufungspunkte von singulären Stellen natürlich wieder singuläre Stellen sind, so ist jede Stelle des Konvergenzkreises singulär. Könnte man ja auf irgendeinem Radius die Funktion über den Kreis hinaus fortsetzen, so müßte es auf demselben einen von Singularitäten freien Bogen geben.

Man nennt die Peripherie des Einheitskreises eine *natürliche Grenze* der Funktion, das Innere desselben ihren *Existenzbereich*. Schon der Umstand, daß man den Einheitskreis auf andere Bereiche analytisch abbilden kann, läßt vermuten, daß die Gestalt des Existenzbereiches eine recht mannigfache sein kann. Wir werden später (S. 297) sehen, daß er in weitem Ausmaß willkürlich vorgegeben werden kann. Wir werden lernen, stets Funktionen mit gegebenem Existenzbereich zu konstruieren.

§ 6. Die Singularitäten der mehrdeutigen Funktionen.

1. Stellen algebraischen Charakters. Wir beschränken uns hier auf die isolierten singulären Stellen. Wir denken uns eine Stelle a und einen um dieselbe geschlagenen Kreis. Es soll möglich sein, ein zu einer Stelle b dieses Kreises gehöriges Funktionselement $\mathfrak{P}(z - b)$ auf *allen* diesem Kreise angehörigen Wegen, welche die Stelle a nicht treffen, fortzusetzen. Diese Elemente mögen eine Umgebung jener singulären Stelle ausmachen.

Der Fall, daß sich dabei eine eindeutige Funktion ergibt, wurde bereits im vorigen Paragraphen erledigt. Nehmen wir an, es ergebe sich eine mehrdeutige Funktion. Dieselbe kann endlichvieldeutig oder unendlichvieldeutig sein. Um klaren Einblick in alle Möglichkeiten zu gewinnen, will ich zunächst annehmen, es gebe eine ganze positive Zahl n derart, daß $f(a + t^n) = F(t)$ in der Umgebung von $t = 0$ eindeutig wird. Dann ergeben sich für $F(t)$ alle früher bei

eindeutigen Funktionen aufgezählten Möglichkeiten. Denn $F(t)$ ist überall in einem Kreise um $t = 0$ erklärt, weil es auf allen $t = 0$ nicht treffenden Kurven fortgesetzt werden kann (vgl. auch S. 223). Also ist entweder $F(t)$ bei $t = 0$ regulär, oder es hat einen Pol m-ter Ordnung, oder aber eine wesentlich singuläre Stelle. In den beiden ersten Fällen wollen wir sagen, die Funktion zeige an der Stelle $z = a$ *algebraischen Charakter*, oder sie habe da einen *algebraischen Verzweigungspunkt n-ter Ordnung*. Die Bennenung werden wir später durch den Nachweis rechtfertigen, daß bei den algebraischen Funktionen andere Singularitäten als diese nicht auftreten. *Die Stellen algebraischen Charakters sind also dadurch definiert, daß die Funktion $f(z)$ in ihrer Umgebung durch eine Entwicklung der Form $\sum a_\varkappa (\sqrt[n]{z-a})^\varkappa$ mit endlichvielen negativen Potenzen dargestellt werden kann.* Die Funktion ist also auf einem n-blättrigen Windungsstück um den Punkt $z = a$ eindeutig. Wir erweitern nun wieder den Begriff des Funktionselementes, indem wir auch derartige Entwicklungen als Elemente ansprechen und ihre n-blättrigen Konvergenzkreise wie die schlichten Kreise zum Aufbau der Fläche verwenden. Im unendlichfernen Punkt ist sinngemäß das gleiche zu machen. Man hat nur statt $\sqrt[n]{z-a}$ die Funktion $\sqrt[n]{\frac{1}{z}}$ als Entwicklungsgröße zu verwenden. Durch diese Erweiterung des Elementbegriffes geht die analytische Funktion in das *analytische Gebilde*, das Riemannsche Feld in die *Riemannsche Fläche* über.

2. Lokale Uniformisierung. Hat man die Funktion in der Form $f(z) = \sum a_\varkappa t^\varkappa$ $(t = \sqrt[n]{z-a})$ entwickelt, so sagt man auch, man habe sie in der Umgebung der Stelle $z = a$ *uniformisiert*, d. h. eindeutig gemacht. Denn mit Hilfe des uniformisierenden Parameters t findet man so die eindeutige Parameterdarstellung der Funktion in der Form

$$z = a + t^n, \quad f(z) = \sum a_\nu t^\varkappa$$

Im Unendlichfernen hat man als uniformisierenden Parameter dann $t = \sqrt[n]{\frac{1}{z}}$ zu verwenden und hat also die Parameterdarstellung

$$z = \frac{1}{t^n}, \quad f(z) = \sum a_\nu t^\varkappa.$$

n bedeutet in beiden Fällen eine positive ganze Zahl. Kommen nur endlichviele negative Potenzen vor, so liegt ein Element algebraischen Charakters vor. Für $n = 1$ sind darunter als Spezialfall die Elemente rationalen Charakters enthalten.

3. Riemannsche Flächen. Unter einer Stelle der Riemannschen Fläche von $f(z)$ versteht man nun den Inbegriff $\{a, \mathfrak{P}(\sqrt[n]{z-a})\}$ oder $\left\{\infty, \mathfrak{P}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{z}}\right)\right\}$,

wo diese Reihen nur endlichviele negative Potenzen enthalten. Jedem algebraischen Element der Funktion entspricht so eine Stelle der Riemannschen Flache, die von der Gesamtheit dieser Stellen gebildet wird. Unter der Umgebung einer Stelle dieser Fläche versteht man, soweit es sich um reguläre Stellen handelt, das gleiche wie beim Feld; soweit es sich um singulare Stellen handelt, macht die S. 217 erklärte Umgebung derselben auch die Umgebung der betreffenden Stelle der Riemannschen Flache aus.

Zu jeder Stelle einer Riemannschen Flache gehört also ein *lokaler uniformisierender Parameter*, d.h. eine in der Umgebung der Flache eindeutig und analytisch erklärte Funktion, durch welche diese Umgebung auf ein schlichtes Flachenstuck abgebildet wird. Als solcher lokaler uniformisierender Parameter kann im Falle einer jeden schon dem Felde angehorigen endlichen Stelle mit der z-Koordinate a die Funktion $t = z - a$ dienen, in der Umgebung einer unendlichfernen Feldstelle wird $t = \frac{1}{z}$ verwendet. In der Umgebung eines endlichen m-blattrigen Verzweigungspunktes benutzt man $t = \sqrt[m]{z-a}$, in der Umgebung eines unendlich fernen m-blattrigen Verzweigungspunktes endlich $t = \sqrt[m]{\frac{1}{z}}$. Eine auf der Flache eindeutig erklarte Funktion heißt dann in einer Flächenstelle stetig, wenn die durch Einfuhrung des Paramaters entstehende Funktion $F(t)$ in $t = 0$ stetig ist, sie heißt regular analytisch, wenn $F(t)$ in $t = 0$ regulär ist. Sie heißt von rationalem Charakter (relativ zur Riemannschen Flache) und besitzt insbesondere einen Pol n-ter Ordnung, wenn $F(t)$ bei $t = 0$ einen Pol n-ter Ordnung besitzt.

Angesichts dieser lokalen uniformisierenden Parameter drängt sich hier schon die Frage auf, ob es nicht moglich ist, auch fur den *Gesamtverlauf* der Funktion solche eindeutige Parameterdarstellungen zu finden, wie sie eben fur die *Umgebung der einzelnen Stellen* abgeleitet wurden. Die Beantwortung fuhrt zur Lehre von der Uniformisierung. Wir werden sie spater ausfuhrlich behandeln.

4. Verzweigung unendlich hoher Ordnung. Jetzt haben wir nur noch ein Wort uber den Fall zu sagen, wo die Funktion in der Umgebung der Stelle a nicht endlichvieldeutig ist, so daß es also keine endlichvielblattrige Umgebung gibt, in der die Funktion eindeutig ist. Dann führt man die unendlichvielblattrige Fläche des $\log(z-a)$ ein und betrachtet die Funktion $f(a + e^t)$ in ihrem Bilde, d. h. also in einer Halbebene. Man erhält dann eine Funktion, die sich auf beliebigen in der Halbebene gelegenen Wegen muß fortsetzen lassen, also eine Funktion, die in der Halbebene eindeutig ist.

Solche unendlichvielblättrige Verzweigungspunkte zählt man aber nie den inneren Punkten der Riemannschen Flache zu. Sie gehoren stets ihrem Rande

an, da sie ja bei der eben betrachteten Abbildung ihrer Umgebung an den Rand des Bildes derselben zu liegen kommen.

5. Aufgabe. Man beweise, daß die S. 213 eingeführten Rationalitätsfelder und die hier eingeführten Riemannschen Flächen funktionentheoretische Bereiche sind im Sinne der S. 69 gegebenen Definition.

§ 7. Der Monodromiesatz.

Es sei ein einfach zusammenhängender Bereich B in der z-Ebene gegeben. A sei ein Punkt aus seinem Inneren und $\mathfrak{P}(z-A)$ ein reguläres Funktionselement. Es soll möglich sein, dasselbe längs jedem beliebigen in B gelegenen Wege fortzusetzen. Dann bilden alle Fortsetzungen, die längs beliebigen in B gelegenen Wegen erhalten werden können, eine in B eindeutige durchweg reguläre Funktion.

Man kann den Satz etwas weniger präzis auch so aussprechen, daß eine in einem einfach zusammenhängenden Bereich reguläre Funktion notwendig eindeutig ist. Der Satz will also von der „lokalen" Eindeutigkeit in der Umgebung der einzelnen Stellen auf die Eindeutigkeit im „großen", d. h. im Gesamtverlauf durch den Bereich, schließen.

Zunächst leuchtet ein, daß ein jedes bei dieser Fortsetzung erhaltene Element im größten ganz in B gelegenen Kreise konvergiert. Denn sonst läge auf seinem Rande eine singuläre Stelle, die dem Inneren von B angehörte. Die Funktion könnte somit auf dem vom Mittelpunkt nach dieser Stelle gezogenen Radius nicht über die Stelle hinaus fortgesetzt werden.

Ich nehme nun zum Beweise an, es gäbe irgendeinen geschlossenen Weg von A nach A, auf dem das Element $\mathfrak{P}(z-A)$ sich fortsetzen ließe, ohne nach Vollendung des Umlaufs zum Ausgangselement zurückzukehren. Die Funktion verhält sich dann mehrdeutig bei Fortsetzung längs der Kurve. Ich will zeigen, daß dies nicht eintreten kann. Da jede Fortsetzung, wie wir gesehen haben (S. 208), durch eine endliche Kette von Elementen bewerkstelligt wird, so ist die hier eingeführte Fortsetzung gleichwertig mit der Fortsetzung längs des Polygones, das die Mittelpunkte der Funktionselemente aus einer solchen Kette miteinander verbindet. Ich zerlege das so erhaltene Polygon durch gerade Querschnitte in Dreiecke (vgl. S. 119). (Fig. 59.) Ich behaupte: Auch bei Fortsetzung längs mindestens einem dieser Dreiecke muß die Funktion mehrdeutig sein. Denn könnten alle Elemente der Kette eindeutig längs der Dreiecke fortgesetzt werden, so würde ich folgende Überlegung anstellen. Statt der Fortsetzung längs des Linienzuges DEF darf ich längs DF direkt fortsetzen,

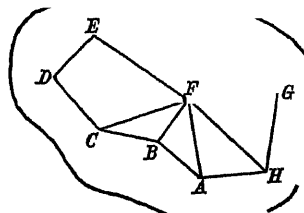



Fig. 59.

weil das in F zum gleichen Element führt. Durch denselben Schluß kann ich statt der Linie CDF die Gerade CF einführen. So fortfahrend kann ich aber schließlich dahin kommen, daß die Fortsetzung längs des Polygones gleichbedeutend mit der Fortsetzung längs des Dreieckes $ABFA$ ist. Durch eine der eben am Beispiel dargelegten ähnlichen Schlußweise kann ich stets ein Dreieck nach dem anderen abspalten, um schließlich ein einziges an die Ecke A anstoßendes übrig zu behalten. Auch hier würde die Fortsetzung zum Ausgangselement zurückführen. Soll dies nun aber bei der Polygonfortsetzung nicht statthaben, so muß es unter all den eben betrachteten mindestens ein Dreieck geben, für das die Fortsetzung nicht zum Ausgangselement zurückführt. Ein solches Dreieck greife ich heraus. Ähnlich wie beim Cauchyschen Integralsatze zerlege ich es in 4 Teildreiecke (Fig. 43) und schließe wie eben, daß schon bei Fortsetzung längs eines derselben eine Mehrdeutigkeit sich zeigen muß. Auf diese Weise werde ich auf immer kleinere Dreiecke geführt. Nach einer gewissen Zahl von Schritten gelangt man aber so zu einem Dreieck, das ganz dem Inneren eines jeden Funktionselementes angehört, dessen Mittelpunkt am Rande des Dreiecks liegt. Denn der Konvergenzradius ist mindestens dem Abstand des großen Dreiecks vom Rande von B gleich. Daher kann längs einem derartigen Dreieck die Fortsetzung nur eindeutig sein. Daher ist sie auch längs jedem Dreieck, längs jedem Polygon, längs jeder geschlossenen Kurve eindeutig. Somit gehört zu jedem Bereichpunkt nur ein Funktionselement und die verschiedenen Fortsetzungen erklären in B eine eindeutige Funktion

Der hier bewiesene Satz ist wesentlich an die Voraussetzung eines einfach zusammenhängenden Bereiches B gebunden. Ist B mehrfach zusammenhängend, so bleibt bei sonst unveränderten Voraussetzungen der Satz nicht mehr richtig. Denn dann kann das Polygon, das wir beim Beweis benutzten, Randpunkte des Bereiches umschließen. Dann besteht sein Inneres nicht nur aus Bereichpunkten, und die Dreieckzerlegung führt aus dem Bereich heraus So ist z. B. der $\log z$ auf jedem Wege in einem um den Nullpunkt gelegten konzentrischen Kreisring fortsetzbar, ohne doch in diesem Bereiche eindeutig zu sein.

Der Satz kann auf Funktionen erweitert werden, welche zwar nicht selbst auf allen Wegen fortsetzbar sind, welche aber die Eigenschaft besitzen, daß ihre einzigen bei Fortsetzung im gegebenen Bereiche erreichbaren Singularitäten Pole sind. Der Beweis verläuft ganz ähnlich wie eben, nur muß man jedesmal, wenn die Fortsetzung von $f(z)$ selbst zum Stocken kommt, zur reziproken Funktion übergehen. Dann erkennt man wie eben, *daß die bis auf Pole in einem einfach zusammenhängenden Bereiche regulären Funktionen notwendig eindeutig sind.*

§ 8. Das Spiegelungsprinzip.

1. Der einfachste Fall. Es ist der, daß eine *analytische Funktion längs einem Stuck der reellen Achse regular ist und auf diesem Stück reelle Werte annimmt. Setzt man die Funktion nach beiden Seiten dieser Strecke auf konjugiert imaginären Wegen fort, so erhalt man in konjugiert imaginaren Punkten, welche also zur reellen Achse spiegelbildlich liegen, konjugiert imaginare Funktionswerte.*

Der Satz sagt einmal aus, daß man die Funktion auf einem Wege dann und nur dann fortsetzen kann, wenn man sie auf dem gespiegelten Wege fortsetzen kann. Er gibt gleichzeitig eine Beziehung zwischen den so erhaltenen Funktionswerten an. Er enthalt also sowohl eine Aussage uber die Moglichkeit als eine Angabe uber den Verlauf der Fortsetzung.

Zum Beweise nehme ich an, das Stuck der reellen Achse liege zwischen a und b und α sei ein Punkt desselben. Eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(z-\alpha)$, welche in der Umgebung der Stelle α auf der reellen Achse reelle Werte annimmt, besitzt reelle Koeffizienten. Denn die Koeffizienten sind bis auf die Faktoren $\frac{1}{n!}$ den Ableitungen der Funktion im Punkte α gleich. Diese sind aber, wie die Funktion selbst, reell. Denn laßt man z. B. in $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ z und h nur reelle Werte durchlaufen, so kommt ein reeller Grenzwert heraus. Die Summe einer Potenzreihe aber mit reellen Koeffizienten nimmt in konjugiert imaginaren Punkten ihres Konvergenzkreises konjugiert imaginare Werte an. Nun werde ein solches Element auf konjugiert imaginaren Wegen fortgesetzt. Seien etwa β, $\bar\beta$ zwei konjugiert imaginare Punkte im Konvergenzkreise und $\mathfrak{P}(z-\beta)$ sowie $\mathfrak{P}(z-\bar\beta)$ die durch unmittelbare Fortsetzung erhaltenen Elemente. Dann sind die Koeffizienten dieser Reihen wieder bis auf den Faktor $\frac{1}{n!}$ die Ableitungen von $\mathfrak{P}(z-\alpha)$ in den beiden konjugiert imaginaren Punkten. Diese sind aber konjugiert imaginar. Nun hat man wieder in diesen beiden konjugiert imaginaren Konvergenzkreisen dieser beiden Elemente zwei konjugiert imaginare Punkte zu nehmen und da die neue Entwicklung anzusetzen. Wieder erhalt man konjugiert imaginare Elemente.

2. Verallgemeinerungen. Der Satz kann in mannigfacher Weise erweitert werden. Zunachst werde angenommen, daß die Funktion statt auf der reellen Achse auf irgendeiner Strecke einer anderen Geraden g_z Werte annehme, die wieder irgendeiner Geraden g_w angehoren. *Dann nimmt die Funktion in Punkten, welche spiegelbildlich zu g_z liegen, Werte an, welche zu g_w spiegelbildlich sind.* Zum Beweise hat man nur eine *Drehung* beider Ebenen vorzunehmen, welche die beiden Geraden in die reellen Achsen uberfuhrt. Seien z. B. $z=\alpha z_1+\beta$ und $w_1=Aw+B$ zwei Drehungen dieser Art, dann wird $w_1=Af(\alpha z_1+\beta)+B$.

Dies ist nun eine Funktion, welche für reelle z_1 reelle Werte w_1 annimmt. Sie nimmt daher in konjugiert imaginären Punkten konjugiert imaginäre Werte an. Gehen wir nun durch die inverse *Drehung* zu der z- und w-Ebene zurück, so werden aus diesen konjugiert imaginären Punkten Punkte, welche zu den Geraden g_z und g_w spiegelbildlich liegen.

Es leuchtet ein, wie man statt mit Drehungen analoge Überlegungen mit beliebigen winkeltreuen Abbildungen anstellen kann. Wir wollen z. B. beliebige lineare Abbildungen heranziehen. Da diese die reelle Achse in Kreise überführen und dabei konjugiert imaginäre Punkte in inverse Punkte dieser Kreise verwandeln (S. 59), so gewinnen wir dann den folgenden Satz:

Eine analytische Funktion sei auf einem Bogen eines Keises K regulär und bilde ihn auf einen Kreisbogen K_1 ab. Dann nimmt die Funktion bei der Fortsetzung auf zu K inversen Wegen stets zu K_1 inverse Werte an.

3. Vertiefung. Noch in anderer Richtung kann unser Satz vertieft werden. Man kann nämlich ohne die Annahme auskommen, daß die Funktion auf dem Stück der reellen Achse analytisch ist. Es genügt die Stetigkeit vorauszusetzen, um daraus schon auf den analytischen Charakter zu schließen. Ich will die Voraussetzungen genau formulieren:

In einem von einem Stück der reellen Achse begrenzten Bereich B der oberen Halbebene sei $f(z)$ eindeutig und analytisch. Überdies sei die Funktion im abgeschlossenen Bereich, also namentlich auf der reellen Achse, stetig und nehme hier reelle Werte an, dann ist sie auch auf der reellen Achse analytisch.

Zum Beweise spiegeln wir den Bereich B an der reellen Achse und vereinigen ihn mit diesem Spiegelbild zu einem größeren Bereiche. Im Spiegelbild werde die Funktion $f(z)$ nun auch erklärt durch die Festsetzung, daß $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ sein soll. So erhalten wir eine im erweiterten Bereiche stetige Funktion, deren analytischen Charakter wir nachweisen wollen. Zu dem Ende schlagen wir um einen Punkt der reellen Achse einen dem Bereich angehörigen Kreis K und betrachten das darüber im positiven Sinne erstreckte Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta .$$

Es stellt eine in K analytische Funktion dar. Ich werde beweisen, daß sie in B mit $f(z)$ übereinstimmt. Dann stellt sie im übrigen Teil des Kreises eine Fortsetzung von $f(z)$ dar, so daß diese Funktion also tatsächlich auf der reellen Achse regulär ist. Sei also z im Integral eine Stelle aus dem oberen Halbkreis. Dann füge ich die beiden über den Kreisdurchmesser erstreckten Integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_b^a \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

zu. Ihre Summe ist Null, so daß dadurch keine Änderung eintritt. Dann kann ich das Integral in die beiden Integrale über die beiden Halbkreise zerlegen. Das über den unteren Halbkreis verschwindet, das über den oberen Halbkreis ist gleich $f(z)$, wie ich jetzt beweisen will. Ich betrachte zunächst statt des Integrales über den unteren Halbkreis das Integral über das Kreissegment der Fig. 60. Dieses Integral verschwindet, weil im Inneren dieses Segmentes

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

eine reguläre Funktion von ζ ist. Wähle ich nun aber die Begrenzungsgerade des Segmentes genügend nahe an der reellen Achse, so sind Segmentintegral und Halbkreisintegral wegen der Stetigkeit der Funktion $f(\zeta)$ beliebig wenig verschieden. Daher ist auch das untere Halbkreisintegral Null. Durch dieselbe Überlegung erkennt man auch, daß das obere Halbkreisintegral den Wert $f(z)$ besitzt.

Fig 60

4. Anwendung. Als Anwendung dieser Überlegungen wollen wir den folgenden Satz beweisen. *Von einer Funktion $f(z)$ sei bekannt, daß sie im Inneren des Einheitskreises bis auf Pole regulär ist, daß sie am Rande des Einheitskreises stetig ist und daselbst den Betrag Eins besitzt. Dann ist die Funktion notwendig rational.* Denn nach dem eben bewiesenen Satze ist die Funktion auf dem Einheitskreise regulär[1]) und daher nach dem Spiegelungsprinzip in der ganzen Ebene bis auf Pole regulär. Daher ist sie nach S. 154 eine rationale Funktion.

Neunter Abschnitt.

Einiges über algebraische Funktionen.

§ 1. Allgemeine Sätze.

1. Definition. *Unter einer algebraischen Funktion versteht man eine Funktion $w(z)$, welche einer algebraischen Gleichung zwischen w und z genügt.* Diese Gleichung sei $f(w, z) = 0$. Dann bedeutet $f(w, z)$ eine ganze rationale Funktion, die in w vom n-ten, in z vom m-ten Grade sein möge. Trägt man einen bestimmten Wert von z ein, so erhält man eine algebraische Gleichung in w, die im allgemeinen vom n-ten Grade sein wird. Der Grad erniedrigt sich nur dann, wenn man für z eine Nullstelle des Koeffizienten gewählt hat, welchen w^n bekommt, wenn man die Gleichung nach Potenzen von w ordnet. An diesen

1) Man erkennt dies nach einer vorhin schon angewendeten Schlußweise durch lineare Abbildung des vorigen Satzes.

Stellen liegen die Pole der Funktion $w(z)$. Wir mussen nämlich durchweg auch das Unendlichferne berucksichtigen. Das geschieht in bekannter Weise durch Einfuhrung von $w = \frac{1}{\eta}$, oder, wenn man $w(z)$ für $z = \infty$ untersuchen will, durch Einfuhrung von $z = \frac{1}{\zeta}$. Tragt man dann $\frac{1}{\eta}$ fur w ein, so erhalt man eine Gleichung in η, deren Absolutglied der bisherige Koeffizient der höchsten Potenz von w wird. Wählt man dann z so, daß dieses Absolutglied verschwindet, so hat die entstehende Gleichung eine einfache oder mehrfache Wurzel $\eta = 0$. In ihrer Umgebung konnen wir dann die Wurzeln genau so untersuchen, wie das jetzt bei der Gleichung $f(w, z)$ in der Umgebung jeder anderen Stelle geschehen wird und wie dies im wesentlichen S. 197 bei der allgemeinen Betrachtung der impliziten Funktionen vorgezeichnet ist.

2. Reguläre Funktionselemente. Wir betrachten also nun zunachst die Funktionselemente einer algebraischen Funktion, und dann wollen wir den Aufbau der Funktion aus diesen Elementen etwas naher untersuchen.

Ich nehme zunachst einen Wert $z = a$, fur den $f(w, z) = 0$ n verschiedene endliche Wurzeln $w_1, w_2, \ldots w_n$ besitzt Fur diesen Wert ist also der Koeffizient von w^n von Null verschieden und fur keines der Wertepaare $(a, w_1) \cdots$ (a, w_n) verschwindet $\frac{\partial f}{\partial w}(w, z)$. Wir konnen somit den S 197ff. bewiesenen Satz iber implizite Funktionen anwenden. Es gibt daher n verschiedene Funktionselemente,

$$\mathfrak{P}_1(z-a), \ \ldots \mathfrak{P}_n(z-a),$$

lie fur $z = a$ bzw. die Werte $w_1, w_2, \ldots w_n$ annehmen, und die in der Umgebung von $z = a$ der Gleichung

$$f(\mathfrak{P}_\varkappa(z-a), z) = 0 \ (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

enugen. Jedes derselben definiert somit eine analytische Funktion $w_\varkappa(z)$, die ach dem S. 210 bewiesenen Satz uber die Permanenz der Funktionalgleichunen in ihrem Gesamtverlauf der Gleichung $f(w_\varkappa(z), z) = 0$ genugt. Da aber die Ioglichkeit besteht, daß einzelne der n Elemente auseinander durch Fortstzung hervorgehen, wie z. B. bei $w^2 - z = 0$, so brauchen die n eben erklärn Funktionen nicht voneinander verschieden zu sein. Andererseits zerlege ian $f(w, z)$ in irreduzible Faktoren, d. h. man stelle es als Produkt ganzer itionaler Funktionen dar, die selber nicht mehr weiter in solche Faktoren erfällt werden konnen. Wenn dann ein einzelnes Funktionselement einen lchen irreduziblen Faktor zu Null macht, so machen nach dem eben geannten Prinzip auch alle durch analytische Fortsetzung erhaltlichen Funkonselemente diesen selben Faktor zu Null. Daher setzen wir weiter voraus, $w, z)$ sei irreduzibel.

3. Die Singularitäten. Zunächst müssen wir nun einiges über die Singularitäten der algebraischen Funktionen hervorheben. Wir wollen also jetzt die bisher ausgenommenen endlichen und unendlichen z-Stellen untersuchen. Zunächst kann festgestellt werden, daß nur für endlichviele z-Werte die Gleichung $f(w, z) = 0$ in w mehrfache Wurzeln haben kann, es sei denn, daß die Diskriminante dieser Funktion von w identisch verschwindet. Für mehrfache Wurzeln muß nämlich $f(w, z) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial w}(w, z) = 0$ für dasselbe Wertepaar (w, z) richtig sein. Eliminiert man aber aus beiden Funktionen w, so erhält man die Diskriminante von $f(w, z)$. Ihre Nullstellen sind die z-Werte, zu welchen mehrfache w-Wurzeln von $f(w, z) = 0$ gehören können. Sie kann nicht identisch verschwinden. Denn anderenfalls hätten bekanntlich $f(w, z)$ und $\frac{\partial f}{\partial w}(w, z)$ einen gemeinsamen Teiler gegen die Annahme, daß $f(w, z)$ irreduzibel sein soll. Die Diskriminante ist also eine nicht identisch verschwindende ganze rationale Funktion von z, deren Grad höchstens $(m + n)(m + n - 1)$ ist. *Über den Stellen der z-Ebene, wo die Diskriminante verschwindet, können somit Verzweigungen von $w(z)$ vorkommen. Hinzu kommen noch die Stellen z, wo der Koeffizient der höchsten Potenz von w verschwindet.* Denn dort liegen, wie wir sahen, die Pole der Funktion. Ferner bedarf $z = \infty$ einer besonderen Betrachtung. *Im ganzen sind also höchstens $(m + n)^2 - n + 1$ Stellen in der z-Ebene als Koordinaten singulärer Stellen markiert.* Betrachten wir nun eine der endlichen singulären z-Koordinaten, $z = a$, die zunächst nicht Nullstelle des Koeffizienten von w^n sein möge. Hier ist der Weierstraßsche Vorbereitungssatz anzuwenden. Er lehrt uns, daß man um die betreffende Stelle eine Umgebung abgrenzen kann derart, daß zu jedem Punkt der Umgebung n gewöhnliche, die Gleichung lösende Funktionselemente gehören. Es bleibt also nur noch festzustellen, wie dieselben in der Umgebung der Stelle durch Fortsetzung auseinander hervorgehen. Es leuchtet ein, daß man jedes dieser Elemente auf jedem in der Umgebung gelegenen Weg, welcher die Stelle selbst nicht trifft, fortsetzen kann. Denn sonst gäbe es in jeder Umgebung von $z = a$ weitere z-Koordinaten von singulären Stellen, was offenbar nicht zutrifft. Betrachten wir also ein Element mit einer z-Koordinate, das dieser Umgebung angehört, und setzen es auf irgendeinem Weg bis an $z = a$ hin fort. Wenn wir dabei nicht zu einem regulären Element $\mathfrak{P}(z - a)$ gelangen, so erhalten wir durch diese Fortsetzung eine singuläre Kette, die eine singuläre Stelle mit der z-Koordinate a bestimmt. Ich nehme an, sie sei μ-deutig, $\mu \geqq 1$. Dann ist sie nach den vorausgegangenen Ausführungen völlig μ-deutig (vgl. S. 187). Führt man daher durch $t = \sqrt[\mu]{z - a}$ die neue Variable t ein, setzt also $z = a + t^\mu$ in $f(w, z) = 0$ ein, so wird die Umgebung der singulären Stelle auf die schlichte Umgebung von $t = 0$ abgebildet. Die in jener Umgebung μ-deutig erklärte Funktion $w(z)$

geht dabei in eine um $t = 0$ eindeutig erklärte Funktion über, welche in dieser Umgebung mit etwaiger Ausnahme von $t = 0$ selbst regulär und nach dem S. 200 bewiesenen Vorbereitungssatz auch beschränkt und bei $t = 0$ stetig ist. Sie kann daher in dieser Umgebung durch eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(t)$ dargestellt werden. Daher ist $w(z)$ selbst in der Umgebung jener singulären Stelle durch eine Reihe $\mathfrak{P}(\sqrt[\mu]{z-a})$ dargestellt. An einer z-Stelle, wo der Koeffizient von w^n verschwindet, kann man die endlichen Wurzeln wie bisher untersuchen. Außerdem hat man durch Einführung von $w = \frac{1}{\eta}$ noch nach unendlichen Wurzeln zu fahnden. Man erhält so noch Funktionselemente von der Form $w = \frac{1}{\mathfrak{P}(\sqrt[\nu]{z-a})} = \mathfrak{L}(\sqrt[\nu]{z-a})$, wo ν eine ganze Zahl und $\mathfrak{L}(\sqrt[\nu]{z-a})$ eine Laurentreihe in $\sqrt[\nu]{z-a}$ mit endlichvielen negativen Potenzen ist. Durch Einführung von $z = \frac{1}{\zeta}$ untersucht man endlich noch die Umgebung von $z = \infty$ und erhält so noch Elemente, die durch Laurentreihen $\mathfrak{L}\left(\sqrt[\nu]{\frac{1}{z}}\right)$ mit endlichvielen negativen Potenzen von $\sqrt[\nu]{\frac{1}{z}}$ dargestellt werden.

Diese Umstände rechtfertigen die schon oben für die hier auftretenden Singularitäten gebrauchte Benennung „algebraischer Verzweigungspunkt". *Wenn wir zu den Stellen algebraischen Charakters die regulären Stellen und die Pole noch hinzurechnen, so treten also bei algebraischen Funktionen nur Stellen algebraischen Charakters auf.*

4. Charakterisierung der algebraischen Funktionen. Die Gesamtheit aller dieser Elemente, welche aus einem derselben durch Fortsetzung hervorgehen, machen also eine algebraische Funktion aus. *Wir zeigen zunächst, daß die bisher gefundenen Eigenschaften für die algebraischen Funktionen charakteristisch sind, daß also umgekehrt eine jede endlichvieldeutige Funktion $w(z)$, welche nur algebraische Singularitäten besitzt, einer algebraischen Gleichung $f(w, z) = 0$ genügt.*

Bemerkung. Die Bedingung „endlichvieldeutig" ist wesentlich. Wir werden z. B. in den elliptischen Integralen erster Gattung Funktionen kennenlernen, die nur algebraische Singularitäten besitzen, die aber trotzdem unendlichvieldeutig sind und also nicht algebraisch sein können.

Ich beweise zunächst, daß nur über endlichvielen z-Stellen Singularitäten der Funktion liegen können. Zu dem Zweck stelle ich zunächst fest, daß unter einer endlichvieldeutigen Funktion eine Funktion zu verstehen ist, für welche die Zahl der zu den einzelnen Stellen gehörigen regulären oder algebraisch singulären Elemente beschränkt ist. Sei diese Anzahl etwa höchstens ν, so ordne ich einer jeden singulären Stelle den kleinsten der Konvergenzradien der zu dieser Stelle gehörigen Funktionselemente zu, und zwar meine ich dabei den sphärischen Radius der stereographisch auf die Kugel projizierten Kon-

vergenzkreises. Zu jeder singulären Stelle gehört daher eine von singulären Stellen freie Umgebung. Daher kann es nur endlichviele singuläre Stellen geben; denn für einen Häufungspunkt von singulären Stellen stimmt die eben gemachte Aussage nicht. Somit gibt es auch in der z-Ebene Stellen, über welchen nur reguläre Elemente liegen. Ich greife eine solche Stelle beliebig heraus und nehme an, zu ihr gehörten die μ regulären Elemente $w_1(z)$, $w_2(z)$, $\cdots w_\mu(z)$. Wenn man dieselben auf beliebigen Wegen, die keine singuläre z-Koordinate treffen, fortsetzt, so erhält man alle zu solchen Stellen gehörigen regulären Elemente. Zu jeder regulären z-Koordinate gehören somit gleichfalls genau μ reguläre Elemente. Bilde ich nun das Produkt

$$(w - w_1)(w - w_2) \cdots (w - w_\mu),$$

so wird das eine eindeutige analytische Funktion von z. Denn wenn man dieselbe längs eines geschlossenen Weges in der z-Ebene fortsetzt, der keine singuläre z-Koordinate trifft, so ändern die μ aus $w_1 \cdots w_\mu$ hervorgegangenen Elemente nur ihre Reihenfolge. Das Produkt bleibt somit ungeändert. Ordnet man es nach Potenzen von w, so gilt der gleiche Schluß für die Koeffizienten, die ja symmetrische Funktionen der $w_1, w_2, \ldots w_\mu$ sind. Wir überzeugen uns nun weiter, daß diese Koeffizienten selbst nur algebraische Singularitäten besitzen. Denn Singularitäten können nur über den endlichvielen ausgenommenen z-Stellen liegen. Setzt man nun die μ Elemente auf einem Weg fort, der an eine solche Stelle heranführt, so erhält man für einige dieser Elemente singuläre Ketten, welche eine singuläre Stelle definieren. Nach Voraussetzung hat man aber für die Umgebung einer jeden solchen algebraischen singulären Stelle eine Entwicklung der Funktion von der Form

$$\mathfrak{P}(\sqrt[l]{z-a}) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{P}\left(\sqrt[l]{\frac{1}{z}}\right)$$

mit endlichvielen negativen Potenzen. Die vorkommenden Wurzelexponenten seien etwa $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_\varkappa$. Dann sei λ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache dieser ganzen Zahlen. Dann lassen sich alle Wurzeln als ganze Potenzen von $\sqrt[\lambda]{z-a}$ oder $\sqrt[\lambda]{\frac{1}{z}}$ darstellen, somit sind alle Entwicklungen von der Form $\mathfrak{P}(\sqrt[\lambda]{z-a})$, $\mathfrak{P}\sqrt[\lambda]{\frac{1}{z}}$. Jede ganze rationale Funktion von solchen Entwicklungen hat aber die gleiche Gestalt.[1]) Die Koeffizienten unseres Produktes

$$(w - w_1) \cdots (w - w_\mu)$$

sind aber solche ganze Funktionen von μ solchen Entwicklungen. Daher

1) Wenn also zwei Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ an der Stelle $z = a$ von algebraischem Charakter sind, so gilt das gleiche auch von Summe, Produkt und Quotienten. Daraus

besitzen diese Koeffizienten auch nur algebraische Singularitäten. Da sie aber eindeutig sind, so können diese Singularitäten nicht Verzweigungspunkte, sondern nur Pole sein. Daher sind nach S. 154 die Koeffizienten rationale Funktionen von z. Denn sie sind bis auf Pole regulär. Daher ist die Funktion $(w - w_1) \cdots (w - w_\mu)$ eine rationale Funktion von z und w. Und der Gleichung genügt unsere Funktion; sie ist also tatsächlich eine algebraische Funktion.

Nun fragen wir, ob derselben irreduziblen Gleichung mehrere algebraische Funktionen genügen können. Wenn aber die algebraische Gleichung $f(w, z) = 0$ so beschaffen ist, daß ein Teil ihrer Elemente für sich eine algebraische Funktion, die einer Gleichung $f_1(w, z) = 0$ genügt, so muß sich $f(w, z)$ in der Form $f(w, z) = f_1(w, z) \cdot f_2(w, z)$ schreiben lassen, wo auch $f_2(w, z)$ eine ganze rationale Funktion von w und eine rationale Funktion von z ist. Denn seien $w_1 \cdots w_n$ alle Zweige, welche der Gleichung $f(w, z) = 0$ genügen, und versteht man unter $f_0(z)$ den rationalen Koeffizienten von w^n, so ist

$$f(w, z) = f_0(z)\,(w - w_1) \cdots (w - w_n)$$

Seien weiter $w_1 \cdots w_\mu$ diejenigen derselben, welche für sich der Gleichung $f_1(w, z) = 0$ genügen. Dann ist also $(w - w_1) \cdots (w - w_\mu) = f_1$. Daher wird $(w - w_{\mu+1}) \cdots (w - w_n) = f_2 \cdot \frac{1}{f_0}$ eine ganze rationale Funktion von w und eine rationale Funktion von z. Denn es ist ja $f_2 = \frac{f}{f_1}$, also wie f_1 in z rational.

Eine ganze rationale Funktion von w und z, welche man in zwei Faktoren zerlegen kann, die beide in w ganz und rational sind und beide in z rationale Koeffizienten besitzen, nennt man *reduzibel. Sollen also einer und derselben algebraischen Gleichung mehrere verschiedene algebraische Funktionen genügen, so muß die Gleichung reduzibel sein. Und umgekehrt genügt einer jeden irreduziblen Gleichung eine einzige algebraische Funktion.*

Wir gehen nun dazu über, in einigen Beispielen die Riemannschen Flächen von algebraischen Funktionen wirklich aufzubauen, um einen Überblick über den Zusammenhang ihrer Elemente zu gewinnen.

§ 2. Die Gleichung $z = w^3 + 3w^2 + 6w + 1$.

1. Die Verzweigungspunkte. Diese Gleichung definiert eine dreideutige algebraische Funktion $w(z)$. Ihre Riemannsche Fläche ist daher dreiblättrig über der z-Ebene ausgebreitet. Um den Zusammenhang ihrer Blätter ausfindig zu machen, müssen wir ihre Verzweigungspunkte untersuchen. Wir beginnen

wieder kann man schließen, daß Summe, Produkt und Quotient zweier algebraischer Funktionen selbst algebraisch sind. Ebenso erweist sich die Ableitung einer jeden algebraischen Funktion als algebraisch.

mit den im Endlichen gelegenen. Wir mussen also die Stellen der z-Ebene ausfindig machen, fur welche die Gleichung mehrfache w-Wurzeln hat. Diese Stellen genügen der Gleichung $3w^2 + 6w + 6 = 0$. Wir erhalten also aus ihr zunächst die Werte, welche die Funktion $w(z)$ an jenen Stellen annimmt. Die zugehörigen z-Werte erhalten wir, wenn wir diese w-Werte in die gegebene Gleichung eintragen. Man findet so $w = -1 \pm i$ und $z = -3 \pm 2i$. Es fragt sich nun also, wie die drei Zweige der Funktion $w(z)$ in der Umgebung jener Stellen zusammenhangen. Zwecks Beantwortung dieser Frage beachten wir, daß die Umkehrungsfunktion $z(w)$ ja durchweg eindeutig ist. Soll also etwa $w(z)$ an der Stelle $\alpha = -3 + 2i$ den Wert $w = \mu$ und die Entwicklung $w(z) = \mathfrak{P}(\sqrt[\lambda]{z - \alpha})$ besitzen, so muß umgekehrt $z(w) = \alpha + (\mathfrak{P}(w - \mu))^\lambda$ an der Stelle $w = \mu$ den Wert $z = \alpha$ λ-fach annehmen. Dann mussen also die $\lambda - 1$ ersten Ableitungen der Funktion $z(w)$ an dieser Stelle verschwinden. Tatsächlich verschwindet ja an der Stelle μ die erste Ableitung $3w^2 + 6w + 6$, aber die zweite verschwindet nicht, da ja μ und $\bar{\mu}$ einfache Wurzeln der quadratischen Gleichung sind. Daher liegen uber den Stellen α und $\bar{\alpha}$ zweifache Verzweigungselemente ($\lambda = 2$) der Riemannschen Flache. Da aber die Flache dreiblättrig ist, so gehort zu jeder dieser Stellen außerdem noch je ein reguläres Element Nun haben wir noch den Blatterzusammenhang im Unendlichen zu untersuchen. Man sieht sofort, daß $z(w)$ fur $w = \infty$ einen dreifachen Pol hat; daher hat die Umkehrungsfunktion im Unendlichfernen einen dreiblattrigen Verzweigungspunkt. Bei seiner Umlaufung hangen also die drei Blatter der Flache zusammen. Daher kann auch die Gleichung nicht reduzibel sein.

2. Abbildung der Riemannschen Fläche. Man erhalt einen vielleicht noch etwas deutlicheren Einblick in den Aufbau der Flache, wenn man sie auf die schlichte w-Ebene abbildet. Auf der Flache ist namlich die Funktion $w(z)$ eine eindeutige Funktion des Ortes. Diese nimmt dazu noch jeden Wert nur ein einziges Mal an. Denn um die z-Stelle zu finden, wo der Wert w_0 angenommen wird, hat man nur w_0 in die Gleichung einzutragen. Man findet ein einziges bestimmtes z, zu dem allerdings im allgemeinen drei daruber gelegene Punkte der Flache gehoren. In diesen drei Punkten nimmt aber w drei verschiedene Werte an, wenn nicht gerade uber der z-Stelle ein Verzweigungspunkt liegt. Dann liegen aber auch keine drei Stellen der Flache uber diesem z-Wert. Denn der Verzweigungspunkt zahlt als eine einzige Stelle. Daher wird durch die Funktion $w(z)$ die Flache auf die schlichte w-Ebene abgebildet. Um die Abbildung zu ubersehen, zerschneiden wir durch die gerade Linie, welche die Verzweigungspunkte verbindet, also die Gerade $x = -3$, die ganze Fläche in sechs Halbebenen, in deren jeder dann $w(z)$ eine eindeutige Funktion ist. Auf dieser Geraden ist $x = -3$. Tragen wir $z = -3 + iy$ in die Gleichung

r Abbildungsfunktion ein und trennen Real- und Imaginärteil, so finden r fur die Bildkurve von $x = -3$ in der w-Ebene:

$$-3 = u^3 - 3uv^2 + 3u^2 - 3v^2 + 6u + 1$$

$$y = 3u^2v - v^3 + 6uv + 6v.$$

ie sieht nun diese Kurve aus? Man erkennt leicht, daß die Gerade $u = -1$ r Kurve angehort. Da diese von der dritten Ordnung ist, muß sie also in se Gerade und einen Kegelschnitt zerfallen. Dieser wird die Hyperbel: $^2 - (u + 1)^2 = 3$. Von der Richtigkeit dieser Angaben uberzeugt man sich cht, wenn man die erste der beiden angeschriebenen Gleichungen betrachtet. nn diese erste ist gerade die Gleichung der Bildkurve. Die zweite gibt nur , in welcher Weise die Werte des Parameters y auf der Kurve verteilt sind. e Kurve dritter Ordnung sieht also so aus, wie dies in der Fig. 61 angedeutet . Sie zerlegt tatsachlich die Ebene in sechs Bereiche. Diese entsprechen den hs Halbebenen, in welche die Flache zerfällt. Die Bilder der Verzweigungsnkte werden die Scheitel der Hyperbel. Die Brennpunkte der Hyperbel, lche wir in der Fig. 61 besonders angedeutet haben, also die Punkte $-1 \pm 2i$ fern die in der Riemannschen Flache in den dritten Blattern uber den Vereigungspunkten gelegenen Stellen. Man sieht deutlich, wie in jedem Vereigungspunkt vier Halbebenen zusammenstoßen. Dem entspricht es ja, daß einem Hyperbelscheitel vier der Bereiche eine Ecke gemeinsam haben. Im endlichfernen aber stoßen alle sechs Bereiche zusammen. Um den unendhfernen Punkt winden sich ja auch alle drei Blatter herum.

3. Verallgemeinerung. Es bleibt uns nur noch die Bemerkung, daß das hier rchgerechnete Beispiel fur alle Funktionen $w(z)$ typisch ist, die durch eichungen dritten Grades

$$z = a_0 w^3 + a_1 w^2 + a_2 w + a_3$$

$a_0 \neq 0$ erklart sind. Nur konnen ausnahmsweise, wie etwa bei $z = w^3$, die den endlichen Verzweigungspunkte zweiter Ordnung noch zu einem enden Verzweigungspunkt dritter Ordnung zusammenrucken. Das mag nun h etwas naher erortert werden. Zunachst leuchtet ein, daß der erste Teil serer Uberlegungen, welcher uns den Aufbau der Fläche erkennen ließ, fur allgemeinen Fall in gleicher Weise angestellt werden kann. Solange die dratische Gleichung, aus der wir die Verzweigungspunkte bestimmten, i verschiedene Wurzeln besitzt, muß die Flache zwei Verzweigungspunkte iter Ordnung aufweisen. Im Unendlichen liegt immer ein Verzweigungskt dritter Ordnung, so daß die Gleichung stets irreduzibel ist. Daher mussen h die beiden endlichen Verzweigungspunkte in der beschriebenen Weise

auf die Blätter verteilt sein. Wenn aber unsere quadratische Gleichung eine Doppelwurzel hat, so verschwindet auch noch die zweite Ableitung der Umkehrungsfunktion, und dementsprechend weist die Fläche noch einen endlichen Verzweigungspunkt dritter Ordnung auf. Die Fläche sieht dann so aus, wie wir das bei Funktionen der Art $z = a + (w - b)^3$ gewohnt sind. Tatsächlich sind dies auch die einzigen Fälle, bei welchen ein endlicher Verzweigungspunkt dritter Ordnung auftritt. Denn wegen des Verschwindens der zwei ersten Ableitungen muß die Funktion $z(w)$ an der betreffenden Stelle ihren Wert dreimal annehmen.

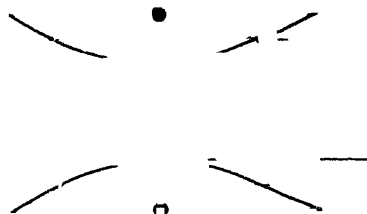



Fig 61

Auch unsere Bemerkung vom Zerfallen der Kurve dritter Ordnung in eine Gerade und einen Kegelschnitt überträgt sich ohne weiteres. Denn da die Gerade, welche die Fläche in sechs Halbebenen zerlegt, durch die Verzweigungspunkte hindurchgeht, hat die Kurve dritter Ordnung zwei mehrfache Punkte. Die Verbindungsgerade derselben schneidet also in mehr als drei Punkten und muß daher der Kurve angehören. Außer der Geraden ist dann immer noch eine Hyperbel vorhanden, die im Falle des endlichen Verzweigungspunktes dritter Ordnung selbst wieder in zwei Gerade zerfallt.

§ 3. Beliebige rationale Funktionen.

Der eben am Beispiel aufgewiesene Sachverhalt, wonach die Riemannsche Fläche der algebraischen Funktion $w(z)$ gerade das durch die rationale Umkehrungsfunktion $z(w)$ entworfene Bild der w-Ebene ist, bleibt bei den Umkehrungen beliebiger rationaler Funktionen $z = f(w)$ richtig. Denn wir lernten ja S. 212, daß die Gesamtheit der Funktionselemente von $w(z)$ durch Umkehrung der Elemente von $f(w)$ erhalten wird. Wenn $f(w)$ als Quotient zweier teilerfremder ganzer rationaler Funktionen geschrieben wird und die höchste dabei vorkommende Potenz von w die n-te ist, so lehrt der S. 190 bewiesene Fundamentalsatz der Algebra, daß zu jedem z-Wert n Werte von w gehören, daß also die Riemannsche Fläche n-blättrig über der z-Ebene ausgebreitet ist. Ihre Verzweigungspunkte erhält man, wenn man diejenigen Elemente der rationalen Funktion umkehrt, deren Ableitung nach dem Ortsparamater $w - a$

ler $\frac{1}{w}$ im Mittelpunkt des Elementes verschwindet, oder die einem mehr-
chen Pol entsprechen. Man hat somit die Nullstellen von $f(w)$ und von $f'\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}$
ifzusuchen und die mehrfachen Nullstellen des Nenners von $f(w)$ zu bestim-
en. Trägt man diese Werte in $z = f(w)$ ein, so erhält man diejenigen Stellen
r z-Ebene, über welchen Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche
gen. Nun verbinde man dieselben durch eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$, welche
e z-Ebene in zwei Bereiche zerlegen möge. Ich will sie wieder Halbebenen
nnen. Ich suche alsdann in der w-Ebene die Bildkurve $\mathfrak{C}'$ von $\mathfrak{C}$ auf. Sie
rlegt die w-Ebene in mehrere Bereiche. Jeder derselben wird durch $z = f(w)$
if eine der beiden Halbebenen abgebildet. Das folgt aus dem Satz auf S. 194.
a aber durch $\mathfrak{C}$ die Riemannsche Fläche in $2n$ Halbebenen zerlegt wird, so
rfällt die w-Ebene durch $\mathfrak{C}'$ in $2n$ Bereiche. In derselben Reihenfolge wie
ese aneinanderhangen, hat man die Halbebenen der Riemannschen Fläche
einanderzuheften. Daher gibt die Bereicheinteilung der w-Ebene ein getreues
ild der Riemannschen Fläche. Gerade dies eben allgemein beschriebene Ver-
hren ist es, das wir im vorigen Paragraphen verwendeten.

§ 4. Die Gleichung $w^2 = a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$.

1. Die Riemannsche Fläche. Sie erklärt eine zweiwertige Funktion $w(z)$
n jeder Stelle unterscheiden sich ihre beiden Werte nur durchs Vorzeichen.
ie beiden Werte fallen in einen zusammen, wenn sie verschwinden. Das ist
ı den Nullstellen der Funktion vierten Grades der Fall. An den von diesen
erschiedenen endlichen Stellen zeigt also auch jedenfalls nach dem Satze
. 159 die Funktion $w(z)$ reguläres Verhalten. Dasselbe ist auch an den etwa
rhandenen zweifachen Nullstellen des Polynomes der Fall. Denn sei z. B.
$^2 = (z-\alpha)^2 g_2(z)$. So wird $w = (z-\alpha)\sqrt{g_2(z)} = (z-\alpha)\,\mathfrak{P}(z-\alpha)$. Liegt aber
i $z = \alpha$ eine einfache Nullstelle, so wird $w = \sqrt{z-\alpha}\sqrt{g_3(z)}$. Dabei ist aber
$\overline{g_3(z)}$ wieder bei $z = \alpha$ regulär, so daß also bei $z = \alpha$ ein zweifacher Ver-
veigungspunkt liegt. Ebenso führen die dreifachen Nullstellen des Polynomes
ı einem zweifachen Verzweigungspunkt. Falls a_0 von Null verschieden ist,
so ein echtes Polynom vierten Grades vorliegt, besitzt $w(z)$ im Unendlichen
nen Doppelpol. Denn es wird

$$w = z^2\sqrt{a_0 + a_1\frac{1}{z} + a_2\frac{1}{z^2} + a_3\frac{1}{z^3} + a_4\frac{1}{z^4}} = z^2\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$$

Venn aber $a_0 = 0$ und $a_1 \neq 0$ ist, also ein Polynom dritten Grades vorliegt,
ıben wir im Unendlichen einen zweifachen Verzweigungspunkt, in welchem
(z) gleichzeitig unendlich wird. $w(z)$ hat auf seiner Riemannschen Fläche
ınn im Sinne der S. 221 gegebenen Erklärung einen einfachen Pol. Wir

nehmen nun zunächst an, die Nullstellen des Polynomes dritten oder vierten Grades seien alle voneinander verschieden. Dann hat also jedensfalls die zweiblättrige Fläche vier Verzweigungspunkte, die beim Polynom vierten Grades alle vier im Endlichen liegen. Beim Polynom dritten Grades liegt einer der vier im Unendlichen. Der Aufbau der Fläche aus den Elementen ist hiermit klargelegt. Man kann sich die Sache etwa dadurch anschaulich vorstellen, daß man sich zwei Exemplare der z-Ebene denkt. Ein jedes werde durch zwei Linien (Fig. 62) in gleicher Weise aufgeschnitten. Die Linien sollen die Verzweigungspunkte a, b, c, d paarweise verbinden. In diesen Linien denke man dann die beiden Blätter kreuzweise aneinander geheftet. So erhält man eine Fläche, die an jedem von a, b, c, d verschiedenen Punkte eine schlichte Umgebung aufweist, sich aber um diese Punkte herumwindet.

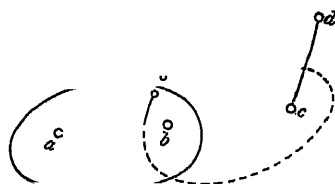



Fig. 62.

2. Unmöglichkeit einer schlichten Abbildung der Riemannschen Fläche. Man könnte nun versuchen, sich den Aufbau noch weiter im einzelnen dadurch klarzumachen, daß man die Fläche auf eine schlichte Ebene abbildet. Da ist aber zu bemerken, daß eine umkehrbar eindeutige bis auf Pole reguläre Abbildung auf eine schlichte Ebene nicht möglich ist. *Diese Abbildung könnte nämlich nur auf eine volle Ebene erfolgen.* Anderenfalls hätte ja der Bildbereich Randpunkte. Sei A einer derselben, so ziehe ich eine Punktfolge des Bildbereiches heran, deren Grenzwert A sei. Diese Punktfolge besitzt eine Folge von Bildpunkten auf der Fläche. A_1 sei ein Häufungspunkt derselben. Grenze ich eine Umgebung um denselben auf der Fläche ab, so wird diese wegen des analytischen Charakters der Abbildung auf einen Bereich der Bildebene abgebildet, welcher notwendig A enthalten muß, denn er enthält unendlichviele Punkte der Folge und das Bild von A_1, das aber nur A sein kann, im Inneren.

Es bleibt also nur zu zeigen, daß man die Fläche nicht umkehrbar eindeutig auf eine schlichte volle t-Ebene abbilden kann.

Um das einzusehen, betrachte ich die Umkehrungsfunktion $z(t)$, welche also in der endlichen t-Ebene bis auf Pole regulär ist und dieselbe auf die zweiblättrige Riemannsche Fläche mit vier Verzweigungspunkten abbilden müßte. Sie nähme einen jeden Wert genau zweimal an. Daraus folgt, daß sie rational sein muß. Dies ist bewiesen (nach S. 154), sowie wir gezeigt haben, daß $z(t)$ auch im Unendlichen von rationalem Charakter ist. Hätte aber $z(t)$ im Unendlichen eine wesentlich singuläre Stelle, so käme sie nach S. 152 in beliebiger Nähe von $t = \infty$ jedem Wert beliebig nahe. Daraus folgt aber nach S. 152, daß sie einzelne Werte unendlichoft annähme. Das widerspräche ihrer Abbil-

dungseigenschaft. Daher ist $z(t)$ rational. Da sie jeden Wert zweimal annimmt, hat sie die Gestalt

$$z(t) \equiv \frac{At^2 + Bt + C}{Dt^2 + Et + F}.$$

Sie führt diejenigen endlichen Punkte der z-Ebene in endliche Verzweigungspunkte über, an welchen die Ableitung verschwindet. Die Ableitung verschwindet aber, wenn

$$(AE - BD)t^2 + 2(AF - CD)t + BF - EC = 0$$

ist. Das ist aber eine *quadratische* Gleichung. Also werden lediglich *zwei* endliche Punkte der t-Ebene in endliche Verzweigungspunkte übergeführt. Daher müßte noch $t = \infty$ einen endlichen Verzweigungspunkt liefern, weil sonst nicht mehr als zwei herauskommen können. Da es aber auf eine lineare Transformation von t nicht ankommt[1]), so darf man annehmen, daß $t = \infty$ keinen Verzweigungspunkt liefert. Niemals kann also eine rationale Funktion die schlichte t-Ebene auf eine zweiblättrige Fläche mit vier Verzweigungspunkten abbilden.

Alles in allem ist somit folgendes bewiesen: *Es ist unmöglich, eine zweiblättrige Riemannsche Fläche mit vier oder mehr Verzweigungspunkten umkehrbar eindeutig und analytisch auf einen schlichten Bereich abzubilden.*

3. Veranschaulichung. Man kann sich den eben aufgewiesenen Sachverhalt auch anschaulich so klarmachen: Es gibt auf der Riemannschen Fläche geschlossene Kurven, welche dieselbe nicht zerfällen. So denke man sich z. B. die vollausgezogene Kurve der Fig. 62 in dem einen Blatt gelegen. Sie zerschneidet die Fläche nicht in zwei Stücke, denn bei Durchlaufung der anderen zum Teil punktierten Kurve kann man von der einen Seite derselben auf die andere gelangen. Die ausgezogenen Teile dieser Kurve liegen im gleichen Blatt wie die erste geschlossene Kurve, die punktierten Teile aber im anderen, da man ja bei Überschreitung der beiden Linien ab oder cd vom einen Blatt ins andere gelangt. Die Existenz solcher geschlossener nichtzerstückender Rückkehrschnitte, wie die ausgezogene Kurve der Fig. 62 einer ist, läßt die umkehrbar eindeutige Abbildung der Fläche auf eine schlichte Ebene unmöglich erscheinen, weil es dort keine geschlossenen nichtzerlegenden Kurven gibt.[2])

1) Eine lineare Transformation von t bedeutet ja nur den Übergang zu einer anderen schlichten Ebene. Man kann so stets erreichen, daß dem Unendlichen kein Verzweigungspunkt entspricht.

2) Auf die Existenz solcher nichtzerlegender „Rückkehrschnitte" fällt noch ein besonderes Licht durch die S. 251 näher zu besprechende gestaltliche Struktur der Riemannschen Fläche.

Fur kompliziertere Riemannsche Flächen spielt die Maximalzahl der nichtzerstückenden Ruckkehrschnitte, das sog. Geschlecht der Flache, eine wichtige Rolle zur Klassifizierung. So ist also die schlichte Ebene vom Geschlecht Null, die zweiblattrige mit vier Verzweigungspunkten, wie man zeigen kann, vom Geschlecht Eins. Dies Geschlecht bleibt bei beliebigen umkehrbar eindeutigen stetigen Abbildungen der Flächen ungeändert. Es ist, wie man sagt, eine Invariante der analysis situs. Die analysis situs hat es ja mit dem Verhalten der geometrischen Gebilde bei umkehrbar eindeutigen stetigen Abbildungen zu tun. So anschaulich bestechend die durch die Riemannschen Flachen fur die Funktionentheorie nutzbar werdenden geometrischen Vorstellungen auch sein mogen, fur die Stringenz und Knappheit der Beweise wird damit wenig gewonnen. Im Gegenteil kommen damit ein gut Teil von Schwierigkeiten neu hinzu. Im zweiten Band wird im Kapitel „Uniformisierung“ von solchen Dingen noch ofter die Rede sein und auch die Theorie des Geschlechtes exakt entwickelt werden.

Zehnter Abschnitt.

Einiges über Integrale algebraischer Funktionen.

§ 1. Die Integrale rationaler Funktionen.

Die Partialbruchzerlegung lehrt, daß diese Integrale als Summe einer rationalen Funktion und des Logarithmus einer rationalen Funktion dargestellt werden konnen. Diese Logarithmen selbst nehmen bei Umkreisung ihrer Singularitaten um gewisse Konstanten zu. Alle Elemente der Integralfunktion also, deren Ableitung dasselbe Element des Integranden ist, unterscheiden sich voneinander um Konstanten, d. i. um Zahlen, die von der einzelnen Stelle des Elementes unabhangig sind. Man nennt sie die *Perioden des Integrales.* Wir greifen nur ein Beispiel heraus, das uns schon S. 96 begegnete, den Arcustangens. Es sei $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta}$. Die Ausrechnung ergibt

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \log \frac{i-z}{i+z}.$$

Um die Funktionselemente des Integrales zu untersuchen, hat man die Elemente des Integranden zu integrieren. Alle liefern regulare Elemente. Nur die zu $z = \pm i$ gehörigen Elemente des Integranden fuhren zu logarithmischen Singularitäten. Bei Umlaufung dieser Stellen wächst der Arcustangens um π.

Die zum gleichen z gehörigen Werte des Arcustangens unterscheiden sich voneinander um Vielfache von π. Sie gehen daher auseinander hervor, wenn man z geeignete Umläufe um $\pm i$ machen läßt. Daher bilden alle diese Bestimmungsweisen des Arcustangens eine einzige analytische Funktion.

§ 2. Quadratwurzeln aus Polynomen zweiten Grades.

1. Der arcussinus. Man lernt schon in der Integralrechnung, daß man durch einfache Umformung auf die Quadratwurzeln aus $1 \pm z^2$, $z^2 \pm 1$ usw. zurückkommen kann, und wenn man dazu noch das Komplexe zuläßt, so kann man sich auf die Betrachtung von $\sqrt{1-z^2}$ beschränken. Hier beginnen wir mit dem arcussinus, der uns schon S. 101 einmal begegnete.[1])

Man kann die Integralfunktion unmittelbar auf der Riemannschen Fläche des Integranden untersuchen. Man hat dazu vor allem einen Überblick über die verschiedenen Elemente des Integranden zu gewinnen und diese dann zu integrieren. Man findet so, daß der arcussinus im Endlichen als Funktion der Fläche überall regulär ist, daß er aber in den beiden unendlichfernen Punkten logarithmische Verzweigungungen aufweist. Denn dort wird

$$\sqrt{1-z^2} = iz\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \pm\frac{i}{z}\left[1+\frac{1}{z}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)\right],$$

so daß also das Integral logarithmisch verzweigt ist. In dem Verzweigungspunkt $z = +1$ wird weiter

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-z}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + (z-1)\mathfrak{P}(z-1)\right),$$

also

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \mathfrak{P}\left(\sqrt{z-1}\right).$$

Hier ist also arcsin z nach der S. 71 eingeführten Ausdrucksweise regulär. Ebenso ist es in den anderen Punkten der Fläche. Bei Umlaufung eines unendlichfernen Punktes erfährt der arcussinus einen Zuwachs um 2π. Er ist also auf der Riemannschen Fläche der $\sqrt{1-z^2}$ nicht eindeutig, sondern unendlichvieldeutig. Dem entspricht es auch, daß er, wir wir S. 101 sahen, diese Fläche auf einen Streifen der Breite 2π abbildet, wie das auch in der Periodizität der Umkehrungsfunktion zum Ausdruck kommt.

2. Uniformisierung. So wie den arcussinus kann man auch die übrigen Integrale von rationalen Funktionen von z und $w = \sqrt{1-z^2}$ auf der Riemannschen Fläche betrachten. Besser ist es aber jetzt — und manchem Leser wird es

1) Der Leser rufe sich die Betrachtungen von S. 99 u. S. 115 ins Gedächtnis zurück.

schon fur den arcussinus selbst besser erscheinen —, wenn wir jetzt die rationalisierenden Substitutionen heranziehen, die man ja schon im Relleen kennt und gerne verwendet. Diese Substitutionen laufen einfach darauf hinaus, daß man durch eine geeignete Abbildung, wie z. B.

$$t = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}},$$

die zweiblättrige Flache der $\sqrt{1-z^2}$ auf eine schlichte volle t-Ebene abbildet und in ihr dann die Integrale untersucht.[1]) Durch eine solche Substitution werden die Integrale einer jeden rationalen Funktion von z und $\sqrt{1-z^2}$ notwendig Integrale rationaler Funktionen.

Eine jede algebraische Funktion von z geht namlich durch diese Substitution in eine algebraische Funktion von t über. Ist diese wie z und $\sqrt{1-z^2}$ dazu noch eindeutig, so ist sie rational. Ebenso ist dann auch $\frac{dz}{dt}$ rational.

Wir wollen uns hier noch im Vorbeigehen den allgemeinen Satz notieren, daß *alle Funktionen, die auf der Flache durchweg von rationalem Charakter sind, notwendig eindeutig sind und sich als rationale Funktionen von z und $\sqrt{1-z^2} = w$ darstellen lassen.*

Dies leuchtet sofort ein, wenn wir eine spezielle Abbildung $t(z)$ der Flache auf eine schlichte t-Ebene betrachten und feststellen konnen, daß ihr t auf der Flache eine rationale Funktion von z und w ist. Eine solche Abbildung ist z B. $t = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} = \frac{1-z}{\sqrt{1-z^2}}$. Hier ist in der Tat t eine rationale Funktion von z und w. Durch diese Abbildung gehen aber alle Funktionen, welche auf der Flache durchweg von rationalem Charakter sind, in Funktionen uber, welche in der t-Ebene durchweg von rationalem Charakter[2]), also rationale Funktionen $f(t)$ sind. Sie sind also auch rationale Funktionen von z und w.

Jede andere Abbildung der Flache auf eine andere schlichte Ebene muß also durch eine in der t-Ebene rationale Funktion vermittelt sein, welche diese auf eine andere schlichte Ebene abbildet. Also sind alle anderen Abbildungen durch

1) Vgl. hierzu S 99 u. S. 115

2) Ist z. B. $f(z)$ bei $z = 1$ regular, so gilt eine Entwicklung

$$f(z) = \mathfrak{P}(\sqrt{1-z}),$$

nun aber ist $\sqrt{1-z} = t\ \sqrt{1+z}$ und $z = \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 + t^2\,\mathfrak{P}(t^2)$. Also wird

$$\sqrt{1-z} = \mathfrak{P}(t).$$

Also ist
$$f(z) = \mathfrak{P}(t).$$

Ebenso schließt man an den übrigen Stellen.

lineare Funktionen von dem eben eingeführten speziellen t darstellbar. Alle die scheinbar verschiedenen rationalisierenden Substitutionen also, welche man im Reellen betrachtet und von welchen schon S. 115 die Rede war, sind weiter nichts als verschiedene lineare Funktionen einer beliebigen derselben, z. B. des hier gewählten t.

3. Rationale Funktionen von z und $\sqrt{1-z^2}$ unter dem Integral. Kehren wir nun zu den Integralen

$$J(z) = \int \Re(z, \sqrt{1-z^2})\, dz,$$

von welchem wir ausgingen, zurück. Wir machen die Substitution

$$t = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}, \quad \text{d.h.} \quad z = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{also} \quad w = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Dann wird $$J(z) = F(t) = -4 \int \Re\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{t}{(1+t^2)^2}\, dt.$$

Wir haben also das Integral einer rationalen Funktion vor uns. Wir wenden dies insbesondere auf

$$\zeta = \arcsin z = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

an. An der unteren Grenze $z = 0$ ist $w(0) = +1$ zu wählen (S. 102). Dann finden wir

$$\zeta = \arcsin z = -2 \int_1^t \frac{d\tau}{1+\tau^2} = i \log \frac{t-i}{t+i}\, i = -i \log (iz + \sqrt{1-z^2}).$$

Bei der Abbildung der Riemannschen Fläche auf die schlichte t-Ebene gehen die beiden unendlichfernen Punkte in die Punkte $t = i$ und $t = -i$ über. Man findet bestätigt, daß hier der $\arcsin z$ logarithmische Verzweigungen aufweist. Gleichzeitig hat man eine übersichtliche Vorstellung von der Bauart seiner Riemannschen Fläche. Sie ist einfach das Bild der Riemannschen Fläche von $\log \frac{t-i}{t+i}$.

Unmittelbar erkennt man auch wieder[1]), daß der arcussinus die t-Ebene und damit die zweiblättrige Fläche auf unendlichviele Streifen der Breite 2π abbildet derart, daß jeder Punkt der Fläche unendlichviele Bildpunkte besitzt, welche auseinander durch Verschiebung um Vielfache von 2π hervorgehen. Jede auf der Fläche oder in der t-Ebene eindeutige Funktion von durchweg rationalem Charakter geht also durch diese Abbildung in eine Funktion der Arcussinusebene über, welche durchweg im Endlichen rationalen Charakter

1) Vgl. S. 101, wo diese Dinge schon einmal von weniger hoher Warte betrachtet wurden.

aufweist, und welche bei Vermehrung ihres Argumentes um Vielfache von 2π ungeändert bleibt. Sie wird also eine periodische Funktion der Periode 2π. Daß sie von rationalem Charakter wird, erkennt man einfach daraus, daß ja $t = i\frac{i + e^{-i\zeta}}{i - e^{-i\zeta}}$ durchweg im Endlichen von rationalem Charakter in ζ ist.

Aber man kann nicht umgekehrt sagen, daß alle eindeutigen Funktionen von ζ, welche durchweg, oder auch nur in der endlichen ζ-Ebene von rationalem Charakter sind, auf der Riemannschen Fläche oder in der t-Ebene durchweg von rationalem Charakter seien. Sie konnen vielmehr bei $t = i$ und $t = -i$ ein ganz beliebiges Verhalten zeigen. Wenn sie nur in der ubrigen t-Ebene von rationalem Charakter sind, gehen sie in eindeutige Funktionen der ζ-Ebene uber, welche durchweg im Endlichen von rationalem Charakter sind. Die Eindeutigkeit ergibt sich wieder als Folge des rationalen Charakters aus dem Monodromiesatz.

§ 3. Elliptische Integrale erster Gattung.

1. Die Funktionselemente. Unter einem elliptischen Integral versteht man ein Integral, dessen Integrand eine rationale Funktion von z und von der Quadratwurzel aus einem Polynom dritten oder vierten Grades von z ist. Man betrachtet also zweckmaßig das Integral auf der zweiblättrigen Riemannschen Flache von

$$w = \sqrt{a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4}.$$

Wir wollen annehmen, daß die Nullstellen des Polynomes voneinander verschieden seien. Denn sonst kommen wir wieder auf den schon im vorigen Paragraphen behandelten Fall eines Polynomes zweiten Grades zuruck.

Wir betrachten in diesem Paragraphen das einfachste aller elliptischen Integrale, das Integral erster Gattung. Dies ist das Integral

$$u(z) = \int_a^z \frac{d\zeta}{w}.$$

Als untere Grenze a sei dabei irgendeine ganz beliebige Stelle der Riemannschen Fläche von $w(z)$ gewählt. Wir wollen den Verlauf dieser analytischen Funktion untersuchen. Zunächst haben wir uns dazu wieder einen Uberblick über ihre Funktionselemente zu verschaffen. Es wird sich zeigen, daß das Integral erster Gattung auf der Riemannschen Fläche eine durchweg reguläre, also auch polfreie Funktion ist. Wir scheiden die Elemente des Integranden in drei Sorten, in endliche reguläre Elemente, in Verzweigungselemente und in unendlich ferne Elemente.

An einer endlichen gewöhnlichen Stelle α der Fläche wird

$$\frac{1}{w} = \mathfrak{R}(z-\alpha) = \frac{1}{w(\alpha)} - \frac{w(\alpha)}{[w(\alpha)]^2}(z-\alpha) + \cdots$$

Also wird auch $\qquad u(z) = \mathfrak{P}_1(z-\alpha) = u(\alpha) + \frac{z-\alpha}{w(\alpha)} + \cdots$

Dort ist also das Integral regulär. Der Konvergenzkreis der Entwicklung reicht, wie gleich angemerkt sei, bis zum nächsten Verzweigungspunkt der Fläche. An einer unendlichen Stelle, welche nicht Verzweigungsstelle sei[1]), wird

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{z^2}\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\sqrt{a_0}}\,\frac{1}{z^2} +$$

Hier wird also[2]) $\qquad u = \frac{1}{z}\,\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right) = u(\infty) - \frac{1}{\sqrt{a_0}}\,\frac{1}{z} + \cdots$

Also auch hier ist $u(z)$ regulär. An einem endlichen Verzweigungspunkt α wird

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{\sqrt{z-\alpha}}\,\mathfrak{P}(z-\alpha) = u(\alpha) + \frac{\alpha_0}{\sqrt{z-\alpha}} + \cdots \quad (\alpha_0 \neq 0).$$

Also hier wird $\qquad u(z) = \mathfrak{P}\left(\sqrt{z-\alpha}\right) = 2\alpha_0\sqrt{z-\alpha} + \cdots$

Auch hier ist $u(z)$ regulär. Sei endlich im Unendlichen eine Verzweigungsstelle der Fläche, liege also ein Polynom dritten Grades vor, so wird

$$\frac{1}{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^3 \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{a_1}} +$$

Also wird $\qquad u(z) = \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right) = u(\infty) - \frac{2}{\sqrt{z}}\,\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \cdots$

Also auch hier ist $u(z)$ regulär. Wie im ersten Falle, so reichen auch in den anderen Fällen die Konvergenzradien bis zur nächsten Verzweigungsstelle der Fläche hin. Denn durch die $\sqrt{z-\alpha} = t$ wird z. B. ein bis zum nächsten Verzweigungspunkt reichender Kreisbereich der Fläche schlicht abgebildet, und in dem Bildkreis konvergiert die Reihe als gewöhnliche Potenzreihe in t. Also muß die Reihe $\mathfrak{P}\sqrt{(z-\alpha)}$ auf der Fläche auch in dem bis zur nächsten Verzweigungsstelle reichenden Kreis konvergieren.

1) Es liege also ein echtes Polynom vierten Grades vor.

2) Daß $u(\infty) = \int\limits_a^\infty \frac{dz}{w}$ endlich ist, sieht man, wenn man schreibt $\int\limits_a^\infty = \int\limits_a^{a_1} + \int\limits_{a_1}^\infty$, wo a_1 eine Stelle innerhalb der Konvergenzkreises der eben aufgeschriebenen Entwicklung von $\frac{1}{w}$ ist.

2. Abbildung durch das Integral erster Gattung. Die oben gegebenen Entwicklungen beginnen mit den im Ortsparameter linearen Gliedern. Daher wird die Umgebung einer jeden Stelle der Fläche auf ein schlichtes im Endlichen gelegenes Gebiet der u-Ebene abgebildet. Wir wollen daraus schließen, daß die Riemannsche Fläche $w(z)$ durch $u(z)$ überhaupt auf die schlichte endliche u-Ebene abgebildet wird. Dazu betrachten wir die Umkehrungsfunktion $z(u)$. Alle ihre Elemente sind von rationalem Charakter. Wir ordnen jeder Stelle des Bildbereiches über der u-Ebene eine Zahl zu: den *Rationalitätsradius* der Funktion $z(u)$. Das ist der Radius des größten um die betreffende Stelle der u-Ebene als Mittelpunkt beschriebenen Kreises, in welchem $z(u)$ durchweg von rationalem Charakter ist. Wenn also, wie wir beweisen wollen, $z(u)$ in der ganzen endlichen Ebene von rationalem Charakter ist, so muß der Rationalitätsradius an jeder Stelle unendlich sein. Ist dies aber nicht der Fall, ist er also auch nur an einer Stelle endlich, so ist er, wie wir von S. 207/208 wissen, eine stetige Funktion des Ortes. Wir müssen aber nun weiter bemerken, daß in all den Bildpunkten, die dem gleichen Punkt der Fläche entsprechen, der Rationalitätsradius denselben Wert hat. Denn wenn auch das Integral eine mehrdeutige Funktion der Fläche ist, so kann es bei geschlossenen Umläufen nur um konstante Werte zunehmen, weil ja seine Ableitung eindeutig ist; wir haben also mit jedem Bild der Fläche dann weitere Bilder, die aus ihm durch Parallelverschiebung um solche konstante Integralperioden hervorgehen. Gibt es nun aber um einen Punkt einen gewissen Rationalitätskreis, so wird aus diesem durch die Parallelverschiebung ein genau ebenso großer Rationalitätskreis. Fassen wir daher nun den Rationalitätsradius statt als Funktion der u-Ebene als Funktion auf der Riemannschen Fläche der Quadratwurzel auf, so wird er eine auf der Fläche eindeutige durchweg stetige Funktion, die nirgends verschwindet und stets positive Werte annimmt. Eine solche Funktion besitzt aber bekanntlich ein positives Minimum. Also gibt es um jeden Punkt der u-Fläche einen Rationalitätskreis, dessen Radius oberhalb einer gewissen wesentlich positiven Grenze liegt. Daher kann es keine singulären Stellen nicht rationalen Charakters für die Funktion $z(u)$ geben, denn bei Annäherung an eine solche Stelle müßte der Rationalitätsradius den Grenzwert Null haben. Daher ist $z(u)$ in der ganzen endlichen u-Ebene von rationalem Charakter und daher nach dem Monodromiesatz eine eindeutige Funktion. Da weiter

$$\frac{dz}{du} = w$$

ist, so ist auch $w\{z(u)\}$ eine bis auf Pole reguläre eindeutige Funktion. Daher vermittelt das Integral erster Gattung eine schlichte Abbildung der Riemannschen Fläche auf die u-Ebene. Denn anderenfalls müßten zwei verschiedene

Punkte der Riemannschen Fläche, also auch zwei verschiedene Wertepaare (z, w) einmal dieselbe Stelle der u-Ebene liefern, was wegen der Eindeutigkeit beider als Funktionen von u nicht angeht. Aus diesen Darlegungen ergibt sich auch, daß der Bildbereich die u-Ebene völlig erfüllt. Denn anderenfalls müßte man bei Fortsetzung der Funktion $z(u)$ irgendwo einmal im Endlichen auf eine singuläre Stelle nichtrationalen Charakters stoßen. So erhalten wir den

Satz. *Das elliptische Integral erster Gattung vermittelt die schlichte Abbildung der Riemannschen Fläche seines Integranden auf eine volle Ebene mit Ausschluß des unendlichfernen Punktes derselben.*

§ 4. Über die Perioden eindeutiger analytischer Funktionen.

1. Die Umkehrung des Integrales erster Gattung als mehrfach periodische Funktion. Wir haben damit gezeigt, daß das Integral erster Gattung die Riemannsche Fläche auf die schlichte endliche u-Ebene abbildet. Diese Abbildung kann aber nicht umkehrbar eindeutig sein. Unmöglich kann also das Integral eine auf der Fläche eindeutige Funktion sein. Denn schon S. 237 haben wir festgestellt, daß eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Fläche auf einen schlichten Bereich nicht möglich ist. Andererseits können sich die verschiedenen Zweige des Integrales nur um additive Konstanten unterscheiden. Denn je zwei zur selben Stelle der Riemannschen Fläche gehörige Elemente desselben haben dieselbe Ableitung. Bei Vermehrung von u um diese Konstanten muß aber dann $z(u)$ ungeändert bleiben. Also ist $z(u)$ eine periodische Funktion. Sie kann aber unmöglich eine einfach periodische Funktion sein, d. h. eine Funktion, deren Perioden alle als Multipla einer derselben, etwa p, aufgefaßt werden können. Denn sonst unterschieden sich alle Zweige des Integrales erster Gattung um Multipla von p.

Das bedeutete aber, daß durch das Integral die Fläche auf unendlichviele verschiedene Streifen der Breite p abgebildet würde. Jeder dieser Streifen aber würde durch die Funktion $e^{2\pi i \frac{u}{p}} = t$ auf die schlichte t-Ebene mit Ausschluß von $t = 0$ und $t = \infty$ abgebildet. u-Stellen, die sich um Multipla von p unterscheiden, liefern die gleiche t-Stelle. Einer jeden Stelle der Fläche entsprechen aber nur solche u-Stellen, die um Multipla von p verschieden sind, also entspricht jeder Flächenstelle genau eine t-Stelle. Die Riemannsche Fläche wäre also umkehrbar eindeutig auf die t-Ebene abgebildet. Das geht nach S. 237 nicht an. Also können nicht alle Perioden sich als Multipla einer derselben darstellen lassen.

Das Wort *Periode* wird in zweierlei Sinn gebraucht. Einmal versteht man darunter die Wertänderungen der Integrale bei Umläufen der Variablen, welche den Integranden ungeändert lassen. Man versteht unter *Perioden* bei eindeuti-

gen Funktionen $f(z)$ auch die Zahlen, welche eine Funktionalgleichung der Form $f(z+p) = f(z)$ bedingen. Dann spricht man auch von periodischen Funktionen. $z(u)$ ist also eine periodische, aber sicher keine einfach periodische Funktion.

Wie müssen nun die Perioden der eindeutigen Funktion $z(u)$ beschaffen sein? Um das klar zu beantworten, schalten wir eine Betrachtung uber die Perioden beliebiger eindeutiger analytischer Funktionen $f(u)$ ein.

2. Eindeutige Funktionen sind entweder einfach- oder doppelperiodisch. Vor allen Dingen stellen wir fest, daß mit jeder Periode p auch alle ihre positiven und negativen Multipla Perioden sind. Denn wenn $f(u+p) = f(u)$ für alle u gilt, so bleibt diese Gleichung auch richtig, wenn man statt u den Wert $u + p$ einträgt. Das liefert aber $f(u+2p) = f(u+p) = f(u)$. So kann ich weiter schließen und erkennen, daß jedes positive Multiplum von p eine Periode ist. Trage ich aber statt u den Wert $u-p$ ein, so finde ich $f(u) = f(u-p)$ und sehe also, daß mit jeder Periode p auch $-p$ eine Periode ist. Also sind alle positiven und negativen Vielfachen von p auch Perioden.

Ebenso erkennt man, daß mit je zwei Perioden p_1 und p_2 auch $mp_1 + np_2$ für beliebige ganze rationale m und n Perioden sind. Die Perioden bilden also hinsichtlich der Addition und Subtraktion eine Gruppe.

Wir können den Sachverhalt auch als Spezialfall allgemeinerer Zusammenhange auffassen Die linearen Transformationen

$$z_1 = l(z),$$

welche eine eindeutige Funktion $f(z)$ ungeandert lassen, d. h fur welche

$$f(z_1) = f(z)$$

gilt, bilden eine *Gruppe* Unter einer Gruppe von linearen Transformationen versteht man dabei ein System von Transformationen derart, daß mit zwei Transformationen

$$z_1 = l_1(z) \quad \text{und} \quad z_1 = l_2(z)$$

auch die zusammengesetzte $z_1 = l_1\{l_2(z)\}$ zum System gehort und daß auch die inverse Transformation $z = l^{-1}(z_1)$ einer jeden $z_1 = l(z)$ dem System angehort. In diesem Sinne bilden die Periodenvermehrungen, welche $f(z)$ ungeandert lassen, eine Gruppe. Funktionen, die bei solchen Substitutionen ungeandert bleiben, heißen *automorphe* Funktionen, so daß also die periodischen spezielle automorphe Funktionen sind. Weiter ist hiernach klar, daß die Beträge der Perioden einer eindeutigen Funktion eine von Null verschiedene untere Grenze haben. Denn anderenfalls gäbe es beliebig nahe bei der Regularitätsstelle $u = a$ Stellen, wo $f(u) = f(a)$ wäre. Nach S. 140 wäre also $f(u)$ eine Konstante. Denken wir uns nun alle Perioden einer eindeutigen Funktion

in der komplexen Ebene aufgetragen, so können diese Periodenpunkte im Endlichen keinen Häufungspunkt besitzen. Weil nämlich die Differenz irgend zweier Perioden wieder eine Periode ist, so mußte es sonst wieder Perioden von beliebig kleinem Betrage geben. In jedem um den Nullpunkt geschlagenen Kreise liegen daher nur endlich viele Periodenpunkte. Unter allen diesen greife ich einen von möglichst kleinem absoluten Betrage heraus. Er sei p_1. Betrachte ich dann alle Multipla dieser Periode, so liegen die entsprechenden Periodenpunkte alle auf einer Geraden (Fig. 63). Auf dieser Geraden liegen außer diesen keine weiteren Periodenpunkte. Denn sie teilen die Gerade in lauter Intervalle der Länge $|p_1|$. Läge in einem Intervall ein weiterer Periodenpunkt, so unterschiede er sich von seinen Nachbarn um weniger als $|p_1|$. Es gäbe dann also wieder Perioden von kleinerem Betrage als $|p_1|$.

$-p_1$ $\quad 0 \quad$ p_1 $\quad 2p_1$

Fig. 63

Es ist nun möglich, daß mit diesen Multipla einer Periode die Gesamtheit aller Perioden erschöpft ist. Dann haben wir es mit einer einfach periodischen Funktion zu tun. Nehmen wir dann in der komplexen Ebene einen Streifen, der von zwei parallelen Geraden begrenzt sein möge, welche durch eine Verschiebung in Richtung und um den Betrag des Vektors p_1 auseinander hervorgehen, so nimmt die Funktion $f(u)$ alle Werte, deren sie überhaupt fähig ist, in diesem Streifen an. Denn verschieben wir den Streifen nacheinander um alle Periodenvektoren, so erhalten wir eine lückenlose Einteilung der Ebene in kongruente Streifen der Breite p_1 (Fig. 64). Dies Verschieben bedeutet aber ein Vermehren von u um Perioden. Beim Verschieben bleibt $f(u)$ ungeändert. $f(u)$ nimmt also in allen Periodenstreifen die gleichen Werte an. Beispiele solcher einfach periodischen Funktionen sind uns in der Exponentialfunktion und in den trigonometrischen Funktionen bekannt. Als Periodenstreifen der Exponentialfunktion kann ein von der reellen Achse und der Geraden $\mathfrak{J}(u) = 2\pi$ begrenzter Streifen der Breite 2π gewählt werden. Bei den trigonometrischen Funktionen verläuft der Periodenstreifen parallel zur imaginären Achse und hat die Breite 2π. Daß z. B. bei der Exponentialfunktion keine weiteren Perioden vorhanden sind, folgt sofort daraus, daß nach S. 77 die Exponentialfunktion den Periodenstreifen auf eine schlichte Ebene abbildet. Sie nimmt also keinen Wert im Streifen mehr als einmal an; der Streifen kann also auch keine äquivalenten Punkte[1]) mehr enthalten. Daher gibt es keine

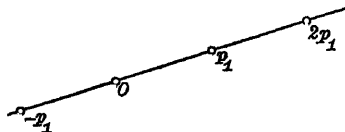



Fig. 64.

1) So sollen Punkte heißen, deren Koordinaten sich um Perioden unterscheiden.

weiteren Perioden. Ebenso sind die trigonometrischen Funktionen einfach periodisch.

Wir nehmen nun als zweiten Fall den vor, wo außer hp_1 noch weitere Perioden vorhanden sind. p_1 war eine kürzeste Periode.

Grenze ich nun um jeden Periodenpunkt der Geraden Op_1 einen Kreis vom Radius $|p_1|$ ab, so liegen im Inneren dieser Kreise keine weiteren Periodenpunkte und man sieht gleichzeitig, daß die Entfernungen aller weiteren Periodenpunkte von dieser ersten Periodengeraden eine positive untere Schranke haben. Diese ist durch die Strecke $d = \frac{|p_1|}{2}\sqrt{3}$ der Fig. 65 gegeben. Mit jedem weiteren Periodenpunkt hat man gleichzeitig eine zu der ersten parallele Periodengerade. Denn mit p sind auch alle Punkte $p + hp_1$, wo h eine beliebige positive oder negative ganze Zahl ist, Periodenpunkte. Auf dieser Geraden liegen die Periodenpunkte natürlich wieder in Abständen $|p_1|$ von einander. Die sämtlichen Periodenpunkte sind somit auf derartigen parallelen Geraden angeordnet. Keine zwei derselben können aus den dargelegten Gründen einen Abstand haben, der kleiner ist als d. Daher gibt es unter allen Periodengeraden zwei, deren Abstand D von der ersten möglichst klein ist. Eine dieser greife ich heraus. p_2 sei irgendein auf ihr gelegener Periodenpunkt. Daher sind nun auch alle Punkte kp_2 Periodenpunkte. Sie liegen wieder auf einer zweiten Geraden (Fig. 66). Lege ich durch diese Punkte Parallelen zu der ersten Periodengeraden und durch die Punkte der ersten, Parallelen zu der zweiten Periodengeraden, so sind alle Schnittpunkte des so erhaltenen Netzes Periodenpunkte (Fig. 67), da ihre Koordinaten die Gestalt $hp_1 + kp_2$ mit ganzzahligen h und k besitzen. Weitere Periodenpunkte kann es aber nun nicht geben. Denn die bisher erhaltenen Parallelen zur ersten Periodengeraden folgen in gewissen konstanten Abständen D aufeinander. Zwischen zwei solchen kann aber keine weitere parallele Periodengerade mehr liegen. Denn sonst erhielte man durch Addition der Multipla von p_2 zu den darauf gelegenen Periodenpunkten zwischen je zwei aufeinanderfolgenden eine weitere Periodengerade, während doch die erste Paralelle möglichst nahe an der ersten Periodengerade gewählt war. Daher können also weder im Inneren noch auf dem Rand irgendeines der Parallelogramme, aus welchen sich das Netz auf-

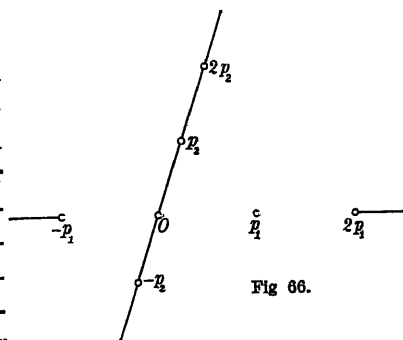



Fig 65

Fig 66.

baut, weitere Periodenpunkte liegen. Auf den horizontalen Rändern kann das nicht geschehen, weil da die Periodenpunkte in Intervallen der Länge $|p_1|$ aufeinanderfolgen, an anderen Stellen ist es nicht möglich, weil die horizontalen Periodengeraden in Abständen D aufeinanderfolgen.

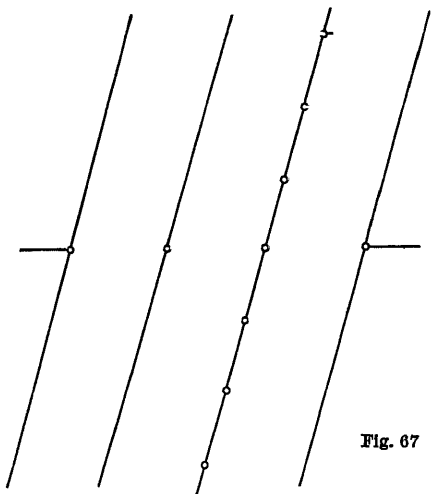



Fig. 67

Alle Perioden lassen sich daher in der Form $hp_1 + kp_2$ darstellen. h und k sind dabei irgendwelche ganze rationale Zahlen. Da also alle Perioden durch zwei passend gewählte derselben ausgedrückt werden können, nennt man Funktionen, die bei Vermehrung ihrer Variablen um alle diese Perioden ungeändert bleiben, *doppelperiodische Funktionen*. Die Benennung soll sie von den einfachperiodischen Funktionen unterscheiden, bei welchen sich alle Perioden als Multipla einer derselben darstellen lassen. *Alle eindeutigen periodischen Funktionen sind also entweder einfachperiodisch oder doppelperiodisch.*

3. Wieder das elliptische Integral erster Gattung. Wir können nun auch die Frage nach der durch das Integral erster Gattung vermittelten Abbildung der Riemannschen Fläche endgültig beantworten. Die Abbildung liefert unendlich viele Bilder der Fläche, die auseinander durch Verschiebung um Perioden hervorgehen. Da aber, wie wir wissen, die Perioden nicht Multipla einer derselben sein können, so liegt der doppelperiodische Fall vor. Zwei Grundperioden[1] $p_1 = 2\omega_1$ und $p_2 = 2\omega_2$ bestimmen ein *Periodenparallelogramm* (Fig. 68). Da nie zwei Punkte aus dem Inneren eines solchen sich um Perioden unterscheiden und andererseits jeder Punkt der Ebene durch Periodenvermehrung aus einem passenden Punkt dieses Parallelogrammes hervorgeht, so wird also die Riemannsche Fläche umkehrbar eindeutig auf ein solches Parallelogramm abgebildet, so zwar, daß zwei Punkte des Randes, die sich nur um eine Periode $2\omega_1$ oder $2\omega_2$ unterscheiden, demselben Punkt der Fläche entsprechen. Wir haben diese Randerzuordnung (Fig. 68) durch Pfeile angedeutet. Ganz entsprechend liefern ja bei den einfachperio-

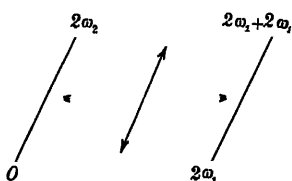



Fig. 68.

1) Unter Grundperioden (oder primitiven Perioden) versteht man ein Periodenpaar (p_1, p_2), aus dem sich alle anderen in der Form $hp_1 + kp_2$ mit ganzen rationalen h, k aufbauen lassen.

dischen Funktionen gegenuberliegende Randpunkte des Periodenstreifens denselben Wert der periodischen Funktion.

Die Abbildung auf ein Periodenparallelogramm widerspricht also ganz und gar nicht der Tatsache, daß eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Fläche auf einen schlichten Bereich nicht moglich ist. Denn Randpunkte besitzen ja in diesem Bildbereich gar keine Umgebung. Was umkehrbar eindeutig auf das Innere des Parallelogramms abgebildet wird, ist nicht die volle Riemannsche Flache, sondern ein Bereich, der aus ihr hervorgeht, wenn man die Bildkurven der Parallelogrammrander auf die Flache einzeichnet und so aus ihr einen berandeten Bereich macht.

Bei der Abbildung durch das Integral erster Gattung geht also jede Funktion, die auf der Riemannschen Fläche durchweg rationalen Charakter besitzt, in eine Funktion uber, welche in der endlichen u-Ebene durchweg von rationalem Charakter ist. Ist die Funktion dazu noch auf der ursprunglichen Fläche eindeutig, so geht sie in eine doppelperiodische Funktion uber. Insbesondere wird also jede rationale Funktion von z und w in eine doppelperiodische Funktion von u ubergefuhrt. Die Integrale solcher rationalen Funktionen, die elliptischen Integrale also, werden in die Integrale der doppelperiodischen Funktionen verwandelt; als solche sollen sie spater genauer untersucht werden.

Diese Abbildung der Riemannschen Flache auf ein Parallelogramm mit paarweise verbundenen (zugeordneten) Randern wirft ein helles Licht auf die gestaltlichen Eigenschaften derselben. Denkt man sich namlich die Ränderzuordnung durch Zusammenbiegen wirklich vollzogen, so entsteht eine Ringflache (Schlauch, ahnlich einem Fahrradschlauch). Und nun wird auch die schon S. 238 herangezogene Existenz gewisser geschlossener Flachenkurven anschaulich klar. Dort namlich betrachteten wir Ruckkehrschnitte — d. h. geschlossene Kurven — durch die die Flache nicht zerfallt. Jede Parallelogrammseite z. B. liefert ja auf dem Ring bzw. der Riemannschen Flache eine solche Kurve.

§ 5. Nähere Untersuchung der elliptischen Integrale erster Gattung.

1. Verlauf der Abbildung. Es wird zur Belebung der Vorstellungen beitragen, wenn wir die durch das Integral erster Gattung vermittelte Abbildung der Flache auf ein Parallelogramm etwas näher zu ergrunden suchen. Wir beschranken uns dabei auf den Fall, daß die vier Verzweigungspunkte der Flache auf der reellen Achse liegen. Sie seien der Große nach geordnet a_1, a_2, a_3, a_4. Es sei also $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Zur Fixierung der Vorstellungen sei angenommen, daß sie alle vier im Endlichen liegen. Durch eine lineare Abbildung der

Fläche kann dies ja stets erreicht werden. Durch einen längs der reellen Achse geführten Schnitt werde zunächst die Fläche in vier Halbebenen zerlegt, die wir einzeln abbilden wollen. Ich beginne mit einer oberen Halbebene. Zunächst habe ich festzusetzen, welchen Wert der

$$\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)} = w$$

ich im Integral

$$u = \int_{a_4}^{\zeta} \frac{dz}{w}$$

verwenden will. Die untere Grenze soll in a_4 liegen. Ich setze

$$z - a_\varkappa = r_\nu e^{i\varphi_\varkappa},$$

verstehe dabei unter $\varphi_\varkappa$ den aus Fig. 69 ersichtlichen Winkel. Für ein der oberen Halbebene angehöriges z sei dann

$$\sqrt{z-a_\nu}\; r_\varkappa^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\varphi_\varkappa}{2}}.$$

Diese Erklärung hat zur Folge, daß zwischen a_4 und a_1 die Wurzel w positiv wird, zwischen a_1 und a_2 negativ imaginär, zwischen a_2 und a_3 negativ reell und zwischen a_3 und a_4 positiv imaginär. Durchlaufen wir nun von a_4 an nach rechts die reelle Achse, so wird u stets wachsende positive Werte annehmen.

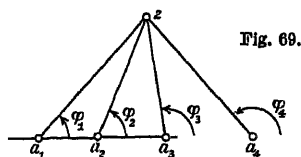



Fig. 69.

Im Unendlichen erhält es einen endlichen Wert, beschreiten wir dann die negative reelle Achse, so wächst u immer weiter, bis es in a_1 einen gewissen endlichen Wert ω_1 annimmt. Wandert dann z weiter auf der reellen Achse nach a_2 zu, so kommen nun positiv imaginäre Beiträge hinzu; also bewegt sich u in Richtung der positiv imaginären Achse weiter. Sobald a_2 erreicht ist, wo u den Wert $\omega_1 + \omega_2$ haben möge, macht u wieder eine Schwenkung um $\frac{\pi}{2}$ nach links, rückt wieder der reellen Achse parallel weiter, um endlich beim Durchgang von z durch a_3 nochmals links zu schwenken. Sowie a_4 wieder erreicht ist, muß auch u wieder im Punkt 0 angekommen sein, denn u ist eine in der oberen Halbebene eindeutige Funktion. Nach dem S. 194 angegebenen Satz wird daher durch das Integral erster Gattung die Halbebene auf das Innere des Rechteckes abgebildet, das u eben umlaufen hat. Auch die Abbildung der anderen drei Halbebenen kann nach dem Spiegelungsprinzip nun übersehen werden. Der Vektor $\overrightarrow{a_4 a_1}$ geht ja in den Vektor $\overrightarrow{0\,\omega_1}$ über. Daher wird die an der Strecke $\overline{a_4 a_1}$ gespiegelte Halbebene auf ein an $\overline{0\,\omega_1}$ gespiegeltes Rechteck abgebildet. Auf das aus beiden zusammengesetzte größere Rechteck

der Fig. 70 ist so ein Bereich der z-Ebene abgebildet, der aus dieser durch Aufschneiden von a_1 bis a_4 entsteht. Spiegelt man daher das Rechteck der Fig. 70 an seiner vertikalen, auf der imaginären Achse gelegenen Grenze, die dem Schlitzstück von a_3 bis a_4 entspricht, so wird dies Spiegelrechteck von der Umkehrungsfunktion des Integrales erster Gattung seinerseits auf ein volles Exemplar der z-Ebene, also das andere Blatt unserer zweiblättrigen Fläche, abgebildet. Diese Fläche selbst also wird auf das Rechteck der Fig. 71 abgebildet. Dem Rande des Rechteckes entspricht der Schlitz der Fläche, welcher noch von a_1 bis a_2 reicht. Punkte des Rechteckes Fig. 71, welche sich nur durch das Vorzeichen von u unterscheiden, liefern bei der Abbildung übereinandergelegene Punkte der Fläche. Das ergibt sich daraus, daß diese durchs Vorzeichen unterschiedenen Punkte gerade dadurch auseinander hervorgehen, daß man die beiden Spiegelungen nacheinander ausführt.

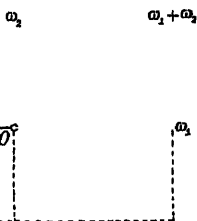
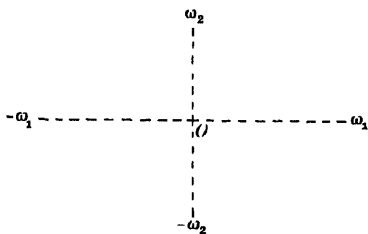
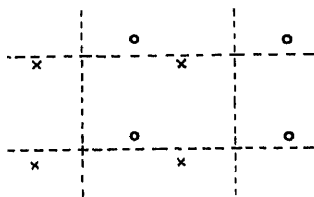
Fig. 70.

Einer erneuten Spiegelung des Rechteckes an einer seiner Grenzen entspricht eine Spiegelung der aufgeschnittenen Fläche an der entsprechenden Begrenzungsgeraden. Setzt man diese Spiegelungen in infinitum fort, so erhält man eine Bedeckung der ganzen Ebene mit lauter kongruenten Rechtecken.

Fig. 71

2. $z(u)$ und $w(u)$. Wie verhalten sich nun $z(u)$ und $w(u)$ bei diesen Spiegelungen? Das lehrt uns wieder das Spiegelungsprinzip. $z(u)$ ist auf den Begrenzungsgeraden aller Rechtecke reell, und zwar sowohl der großen von den Kantenlängen $|2\omega_1|$ und $|2\omega_2|$ als der kleinen punktiert angedeuteten (Fig. 72) der Kantenlängen $|\omega_1|$ und $|\omega_2|$. Daher bedeutet jede Spiegelung den Übergang zum konjugiert imaginären z. Daher besitzt z denselben Wert in den in Fig. 72 markierten Punkten, die durch diese sukzessiven Spiegelungen auseinander hervorgehen. Man sieht, daß diese in zwei Klassen zerfallen, so daß die Punkte einer jeden Klasse auseinander durch die Deckschiebungen des stark ausgezogenen Rechtecknetzes hervorgehen.[1]) Das sind die Verschiebungen $u_1 = u + 2h\omega_1 + 2k\omega_2$, wo h und k irgendwelche ganze Zahlen sind. Die Punkte zweier verschiedenen Klassen gehen auseinander durch Vorzeichenänderung von u hervor.

Fig. 72.

1) Die Punkte der einen Klasse sind durch Nullkreise, die der anderen Klasse durch Kreuze bezeichnet.

Nun bleibt das Verhalten von $w(u)$ bei den Spiegelungen festzustellen. Dabei ist zu beachten, daß $w(u)$ auf den vertikalen Geraden rein imaginär, auf den horizontalen aber reell ist. Das trifft zunächst für die Grenzen des ersten kleinen Rechteckes der Fig. 70 zu und ergibt sich daraus für die anderen durch Spiegelung. Einer Spiegelung an einer horizontalen Geraden entspricht daher eine Spiegelung an der reellen, einer Spiegelung an einer vertikalen Rechtecksgeraden eine Spiegelung an der imaginären w-Achse. Man muß daher in der u-Ebene zwei horizontale oder zwei vertikale Spiegelungen nacheinander ausführen, um Punkte des gleichen w zu erhalten. So nimmt also w denselben Wert in den gleichmarkierten Punkten der Fig. 72 an. Das sind aber gerade die Punkte, die durch die Parallelverschiebungen der doppelperiodischen Gruppe mit den Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_2$ auseinander hervorgehen. Das ist die Gruppe der Deckschiebungen des Netzes der großen Rechtecke. $z(u)$ und $w(u)$ sind daher doppelperiodische Funktionen der angegebenen Gruppe, und alle oben allgemein angegebenen Überlegungen sind bestätigt. Auch im allgemeinen Fall, also bei nicht nur reellen Verzweigungspunkten, kann man die Abbildung in ähnlicher Weise diskutieren und sich eine Vorstellung vom Verlauf der Bilder der geradlinigen Begrenzungsgeraden der Periodenparallelogramme auf der Riemannschen Fläche verschaffen. Doch will ich die nähere Ausführung dem Leser überlassen.[1])

3. Umkehrbar eindeutige Abbildungen der Fläche auf sich. Außer den eben betrachteten Rechtecken gibt es noch eine große Menge anderer Bereiche der u-Ebene, die durch die Umkehrungsfunktion des Integrales erster Gattung auf volle Exemplare der Fläche abgebildet werden. Man hat ja den Bereich nur so zu wählen, daß er zu jedem Punkte der Fläche einen Bildpunkt im Innern oder am Rand besitzt. So wird z. B. ein brauchbarer Bildbereich ein jedes Rechteck, das aus dem gefundenen durch eine *beliebige* Parallelverschiebung hervorgeht. Denn die in Fig. 73 gleichnumerierten kleinen Rechtecke enthalten die Bilder der gleichen Flächenstücke. Ein solches verschobenes Rechteck wird also durch die bisherige Funktion $z(u)$ auf die in anderer Weise wie bisher aufgeschnittene Fläche abgebildet. Aber auch die wie bisher aufgeschnittene Fläche kann auf das verschobene Rechteck abgebildet werden. Man muß nur als Abbildungsfunktion das um eine passende Konstante vermehrte bisherige Integral erster Gattung wählen oder, was dasselbe bedeutet, man muß nur die untere Grenze des Integrales in einen anderen Flächenpunkt legen. Man kann also die in der einen Weise aufgeschnittene Fläche erst auf ein Parallelogramm[2]) abbilden und dann dieses auf die in der anderen Weise aufgeschnittene Fläche. Daher

1) Vgl. dazu: H. A. Schwarz: Crelles Journal. Bd. 70. S. 121ff., oder Ges. math. Abh. II., S. 84ff

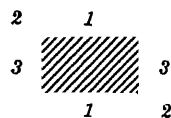
2) Wir führen die Untersuchung gleich für beliebige Flächen durch.

erhält man somit eine *umkehrbar eindeutige Abbildung der Riemannschen Fläche auf sich*, welche durch Funktionen vermittelt wird, welche durchweg von rationalem Charakter auf der Fläche sind. Diese Abbildungen hängen noch von einem komplexen Parameter ab. Sind dies die einzigen umkehrbar eindeutigen Abbildungen der Fläche in sich?

Jeder umkehrbar eindeutigen Abbildung der Fläche entspricht eine umkehrbar eindeutige Abbildung der u-Ebene auf sich, welche den unendlichfernen Punkt festläßt, also durch eine ganze lineare Funktion von u vermittelt wird. Das kann man so einsehen. Es sei etwa die Abbildung durch $z_1 = f(z, w)$ und $w_1 = \varphi(z, w)$ vermittelt.[1]) Daraus erhält man durch Einführung von u_1 und u, die den beiden Punkten (z_1, w_1) und (z, w) entsprechen mögen, zwei Gleichungen zwischen u_1 und u. Durch diese ist aber u_1 bis auf Vielfache der Perioden bestimmt. Denn zu jedem u gehört ein bestimmter Punkt (z, w) der Fläche, zu diesem ein bestimmter Punkt (z_1, w_1) und zu diesem ein bis auf Periodenmultipla bestimmter Wert u_1 des Integrales erster Gattung. Ich will mich an irgendeiner Anfangsstelle $u = a$ für einen bestimmten dieser Werte von u_1 entscheiden und dann u sich stetig ändern lassen und die Funktion $u_1 = g(u)$ analytisch fortsetzen. Sie ist dann stets eindeutig bestimmt, weil nie ein Zweifel sein kann, welchen ihrer um Periodenmultipla unterschiedenen Werte man zu nehmen hat. $g(u)$ ist also durch die ganze u-Ebene auf jedem Wege eindeutig fortsetzbar. Ebenso die Umkehrungsfunktion. Daher erhält man durch $g(u)$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung der u-Ebene auf sich. Sie bildet endliche u auf endliche u_1 ab, da das Integral erster Gattung überall auf der Fläche endlich ist. Daher ist nach S. 155 tatsächlich $g(u)$ eine ganze lineare Funktion: $Au + B$.

Fig. 73.

Bemerkung. Hätte ich mich im Anfangspunkt für einen anderen Anfangswert von u_1 entschieden, so hätte ich eine andere von dieser um eine Periodenverschiebung unterschiedene Abbildung erhalten. Einer Periodenverschiebung in der u-Ebene entspricht ja auch tatsächlich die Abbildung der Fläche auf sich, die jeden ihrer Punkte an seinem Fleck läßt.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die gefundene lineare Abbildung gerade eine Parallelverschiebung sein muß. Das kommt so heraus. Wenn einer linearen Abbildung der u-Ebene eine umkehrbare eindeutige Abbildung der Fläche auf sich entsprechen soll, so muß ein jedes Punktepaar der u-Ebene, das einem und

1) f und φ sind zwei auf der Fläche eindeutige Funktionen von durchweg rationalem Charakter. S. 279 werden wir lernen, daß man sie als rationale Funktionen von z und w darstellen kann.

mselben Punkt der Flache entspricht, in ein Punktepaar ubergeführt werden, s auch einem und demselben Punkt der Fläche entspricht. D. h. mit anderen orten: Punkte, die um Perioden voneinander abweichen, müssen in Punkte ergehen, die gleichfalls um Perioden verschieden sind. Seien also u und $+ \omega$ zwei solche Punkte, so finde ich als Differenz der zugehorigen u_1-Werte $(u + \omega) + B - (Au + B) = A\omega$. Also muß $A\omega$ fur jede Periode ω wieder ie Periode sein. Trage ich also alle Perioden in einer Periodenebene auf, so ıß das System der Periodenpunkte durch die Drehstreckung $v_1 = Av$ in h[1]) ubergeführt werden. Daraus entnimmt man sofort, daß die Drehstreckung ır eine Drehung sein kann, sonst gäbe es Perioden von beliebig kleinem soluten Betrag, wie man durch mehrmalige Anwendung der Drehstreckung kennt. Wenn aber die Perioden nicht eine ganz besondere Beschaffenheit sitzen, so kann diese Drehung nur um den Winkel Null oder 180 Grad folgen. Soll nämlich die Drehung eine andere sein, so mussen z. B. Periodenınkte vorhanden sein, die in den Ecken eines regularen Polygones angeordnet ıd. Das wird aber im allgemeinen nicht der Fall sein.

Die einzigen Transformationen der Fläche in sich drucken sich durch die ıearen Abbildungen $u_1 = u + b$ und $u_1 = -u + b$ mit vollig beliebigem b s. Nur in besonderen Fällen kommen noch weitere Abbildungen hinzu.

Diese besonderen Falle seien jetzt noch aufgesucht. Drehungen um Winkel ' mit einem n[2]), das die Sechs ubertrifft, kommen sicher nicht in Betracht, eil die Seite des regularen n-Ecks dann kurzer ist als der Radius des umgehriebenen Kreises. Ubt man namlich auf die kurzeste Periode die Drehungen ıs, so erhalt man Periodenpunkte in den Ecken des regularen n-Ecks. Da e Differenz zweier Perioden wieder eine Periode ist, so gabe es auch Perioden, ren Lange der Seitenlange des regulären n-Eckes gleich ist, gegen die Anhme, daß der Radius die Länge der kurzesten Periode angibt. Aus diesem ·unde kommen auch keine Drehungen mit $n = 5$ in Betracht. Denn da die ·ehung um 180 Grad auf alle Falle vorhanden ist, so ware auch die Drehung a $\frac{2\pi}{10}$ dann vorhanden, was aus den eben dargelegten Grunden nicht moglich

1) Denn auch die inverse Drehstreckung fuhrt Perioden in Perioden uber. Ware das r ein Teil aller, so wurde schon dieser Teil durch die Drehstreckung wieder in die samtheit aller ubergefuhrt, also erst recht kommen durch die Drehstreckung ausgefuhrt f alle Perioden wieder alle Perioden heraus.

2) Drehungen um $\alpha \cdot 2\pi$, wo α irrational ist, wurden zu Haufungen von Periodenınkten fuhren und Drehungen $2\pi\frac{m}{n}$ mit teilerfremden m und n ziehen Drehungen $\frac{1}{n}$ nach sich, weil man dann zwei ganze Zahlen a und b finden kann, so daß $= am + bn$ ist.

ist. Daher bleiben nur die Fälle $n = 4$ und $n = 6$. Denn $n = 3$ tritt nicht selbständig auf, wegen der immer vorhandenen Drehung um 180 Grad. Diese beiden Fälle sind aber auch wirklich möglich. Im ersten Fall haben wir ein Quadratnetz, im zweiten ein rhombisches Netz.

§ 6. Die Probleme der Uniformisierung.

1. Lokale Uniformisierung. Es ist nun an der Zeit, die verschiedenen Parameterdarstellungen, die wir zum Studium mehrdeutiger Funktionen bisher herangezogen haben, unter einem einheitlichen Gesichtspunkt zu begreifen. Ursprunglich handelte es sich uns nur darum, das Verhalten in der Umgebung einer einzelnen singulären Stelle nichteindeutigen Charakters zu untersuchen und zu Reihenentwicklungen der Funktionen, zu einem Maß fur die Vielfachheit ihrer Nullstellen und Pole in solchen Punkten zu gelangen. Dazu fanden wir in der Abbildung einer Umgebung solcher Stellen durch eine passende m-te Wurzel das geeignete Mittel. Alle Funktionen, die in einem gewissen um die Stelle gelegten Kreise auf allen, die Stelle nicht treffenden Wegen fortsetzbar waren, und die, als Funktionen dieser m-ten Wurzel aufgefaßt, eindeutig wurden, die also bei m-maligem Umlauf um die Stelle sich reproduzierten, konnten in eine nach Potenzen von $\sqrt[m]{z-a}$ fortschreitende Laurentreihe entwickelt werden, die in der Umgebung der Stelle konvergierte. Damit war also in der Umgebung solcher Stellen das Studium der endlichvieldeutigen Funktionen auf das Studium der eindeutigen Funktionen zuruckgefuhrt. Das gelang auch bei den unendlichvieldeutigen Funktionen, wenn wir als Parameter $\log(z-a)$ einfuhrten. Dann wird aus einer derartigen Funktion eine in einer gewissen Halbebene eindeutige reguläre Funktion.

Setzt man $t = \sqrt[m]{z-a}$, so werden $z = a + t^m$, $w = f(a + t^m)$ in der Umgebung von $t = 0$ eindeutige Funktionen. So haben wir eine auf den Parameter t bezogene, in der Umgebung von $t = 0$ eindeutige Parameterdarstellung der um $z = a$ m-deutigen Funktion $w = f(z)$. Setzt man $t = \log(z-a)$, so hat man in $z = a + e^t$, $w = f(a + e^t)$ eine Parameterdarstellung der um $z = a$ beliebig vieldeutigen Funktion $w = f(z)$.

2. Uniformisierung im Großen beim Kreis. In wesentlich weitergreifendem Umfang haben wir nun neuerdings Parameterdarstellungen herangezogen. Statt den Arcussinus auf der zweiblättrigen Fläche der $\sqrt{1-z^2}$ zu betrachten, wandten wir eine der vielen Parameterdarstellungen des Kreises $z^2 + w^2 = 1$ an und gelangten so zum Studium eines Integrales einer rationalen Funktion. Bei diesen Parameterdarstellungen des Kreises wollen wir nun einen Augenblick stehen bleiben. Wir führen ein

$$z = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right).$$

Dann wird $$w = \frac{i}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \quad \text{oder} \quad w = -\frac{i}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

Wir sahen, daß mit jeder solchen Parameterdarstellung auch jede andere brauchbar wird, die aus ihr durch eine lineare Änderung des Parameters t hervorgeht. Dahin gehören ja auch die wohl bekannteren rationalen Parameterdarstellungen

$$z = \frac{2\tau}{1+\tau^2},\quad w = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2},\quad \text{oder} \quad w = -\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2},\quad \tau = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}.$$

Sie gehen aus jenen hervor, wenn man

$$t = i\,\frac{1-i\tau}{1+i\tau}$$

einträgt.

Bemerkung. Das doppelte Vorzeichen, welches w in den Parameterdarstellungen besitzen kann, kommt von der Zweiblättrigkeit der Fläche her. Es steht ja noch völlig in unserem Belieben, welche der Werte w wir im oberen und welche im unteren Blatt unterbringen wollen. Diese beiden Möglichkeiten prägen sich in dem doppelten Vorzeichen aus, so daß wir also je nach der Wahl des Vorzeichens, die wir treffen, zwei verschiedene Parameterdarstellungen erhalten.

Neben diesen rationalen Parameterdarstellungen des Kreises kennen wir noch die transzendenten, z. B. $z = \sin\varphi$, $w = \cos\varphi$. Auch diese sind in unseren obigen Erörterungen über den Arcussinus mitenthalten. Denn wir stellten ja ausdrücklich fest, daß alle auf der Fläche eindeutigen rationalen Funktionen in periodische eindeutige Funktionen der φ-Ebene übergehen. Insbesondere wird $z = \cos\varphi$ und $w = \sin\varphi$, wenn $\varphi = \int\limits_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ ist.

Wir wollen nun den inneren Unterschied dieser verschiedenen Arten von Parameterdarstellung aufsuchen. Er liegt in einer Bemerkung, die wir S. 248 auch schon eingeflochten haben, nämlich, daß in φ eindeutig nicht nur die eben genannten eindeutigen Funktionen der Fläche werden, sondern alle Funktionen der Fläche, die außer in den unendlichfernen Punkten von rationalem Charakter sind, dort aber ein ganz beliebiges Verhalten zeigen dürfen. Gehen diese doch zunächst bei der Abbildung der zweiblättrigen Fläche auf die schlichte t-Ebene in die Funktionen dieser t-Ebene über, welche außer bei Null und Unendlich durchweg von rationalem Charakter sind, dort aber ein ganz beliebiges Verhalten zeigen dürfen. Und so, wie diese Funktionen eindeutig werden, wenn man sie auf den Parameter $\log t$ bezieht, so werden die Funktionen der zweiblättrigen Fläche eindeutig, wenn man den Arcussinus

zu einer Parameterdarstellung des Gebildes heranzieht. Denn man hat ja $\arcsin z = i \log(-iz + \sqrt{1-z^2})$.

3. Uniformisierende Kraft. Stellen wir einen Vergleich an. Alle in der z-Ebene nur bei Null und Unendlich m-blättrig verzweigten Funktionen sind rationale Funktionen des Parameters $t = \sqrt[m]{z}$. Alle irgendwie verzweigten Funktionen werden eindeutige Funktionen von $t = \log z$. Die „uniformisierende", d. h. eindeutig machende Kraft des zweiten Parameters reicht also viel weiter als die des ersten. Eine wesentlich weitere Funktionenklasse wird bei Einführung des Logarithmus eindeutig. Freilich wird bei der Einführung dieses Parameters nicht jede Stelle algebraischen oder rationalen Charakters der uniformisierten Funktion zu einer Stelle rationalen Charakters der Parameterdarstellung. Die Stellen Null und Unendlich gehen in den unendlichfernen Punkt über, wo $z = e^t$ wesentlich singulär ist. Ebenso ist es bei dem Arcussinus. $w = \sqrt{1-z^2}$ weist im Unendlichfernen zwei Stellen rationalen Charakters auf. Bei der rationalen Parameterdarstellung werden aus ihnen die beiden Stellen rationalen Charakters $t = 0$ und $t = \infty$. Bei der transzendenten Parameterdarstellung aber gehen sie in die unendlichferne wesentlich singuläre Stelle der Parameterdarstellung über. Statt der beiden unendlichfernen Punkte kann man irgend zwei andere Stellen der Fläche nehmen und verlangen, eine solche Parameterdarstellung des Kreises, also der Fläche $w = \sqrt{1-z^2}$ zu finden, daß alle Funktionen, die an diesen beiden Stellen irgendwie verzweigt sind, sonst aber rationalen Charakter aufweisen, eindeutige Funktionen des Parameters werden, die durchweg von rationalem Charakter sind. Wählen wir als solche Punkte etwa die Verzweigungspunkte ± 1, so leistet der Parameter $t = \log \frac{z-1}{z+1}$ alles Gewünschte. Wählt man zwei andere Punkte (z_0, w_0), (z_1, w_1), so knüpfen wir erst an die Parameterdarstellung durch $z = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ an. Die beiden Punkte mögen etwa durch die Parameterwerte t_0 und t_1 charakterisiert sein. Dann muß man als Parameter $\log \frac{t-t_0}{t-t_1} = \log \frac{(z-z_0)+i(w-w_0)}{(z-z_1)+i(w-w_1)}$ wählen. Ebenso löst man die Aufgabe, eine eindeutige Parameterdarstellung aller der Funktionen zu finden, welche an irgend zwei Stellen der Fläche etwa Verzweigungspunkte m-ter Ordnung besitzen dürfen. Ein geeigneter Parameter wird

$$\sqrt[m]{\frac{t-t_0}{t-t_1}} = \sqrt[m]{\frac{z-z_0+i(w-w_0)}{z-z_1+i(w-w_1)}}.$$

Schwieriger, schon in der schlichten Ebene schwieriger, wird die Aufgabe, eine Parameterdarstellung aller der Funktionen zu finden, welche an mehr als zwei, also an drei oder mehr Stellen vorgegebene Verzweigungen besitzen dürfen. Wenn dann zufällig die Funktionen auf einer Riemannschen Fläche eindeutig werden, deren schlichte Abbildung man bereits kennt, so ist die

Aufgabe leicht zu lösen. Ein solcher Fall liegt z. B. S. 232 vor. Alle dort auf der betrachteten dreiblättrigen Fläche eindeutigen Funktionen werden durch Abbildung dieser Fläche auf die schlichte Ebene eindeutige Funktionen. Eine solche Abbildung wurde durch die Funktion $w(z)$ geleistet, welche durch die Gleichung $z = w^3 + 3w^2 + 6w + 1$ erklart war.

4. Das allgemeine Problem der Uniformisierung. Es lauft darauf hinaus, fur beliebige analytische Funktionen eindeutige Parameterdarstellungen zu finden. Sei also $w = f(z)$ irgendeine analytische Funktion, so lautet die Frage, ob es zwei eindeutige Funktionen $z(t)$ und $w(t)$ gibt, die fur z und w in $w = f(z)$ eingetragen, diese Gleichung identisch erfullen, und zwar so, daß durch Elimination des Parameters aus den Elementepaaren rationalen Charakters von $z(t)$ und $w(t)$ alle Elemente algebraischen Charakter von $w = f(z)$ erhalten werden. Es handelt sich also um eine eindeutige Parameterdarstellung, eine Uniformisierung des Gesamtverlaufes einer analytischen Funktion.

Eine Parameterdarstellung des Kreises, die diesen Forderungen genugte, lernten wir in den rationalen Parameterdarstellungen kennen. Die transzendenten Parameterdarstellungen losen zugleich in dem eben angegebenen Sinn eine allgemeinere Aufgabe. Sie uniformisieren Funktionen, die noch weitere Singularitaten aufweisen. Z. B. wird ja auch durch eine rationale Parameterdarstellung von $w = \sqrt{1 - z^2}$ eine Parameterdarstellung der Funktion $w = z$ selbst geleistet. So erkennt man, daß unsere Aufgabe mehrere Losungen besitzen kann.

Im elliptischen Integral erster Gattung lernten wir die Losung unseres Uniformisierungsproblemes fur die algebraische Funktion

$$w^2 = a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$$

kennen. w und z werden eindeutige doppelperiodische Funktionen rationalen Charakters des Integrales erster Gattung. Alle auf der Flache unverzweigten Funktionen werden gleichzeitig eindeutige Funktionen rationalen Charakters in u. Also hier wird gleich eine ganz allgemeine Funktionenklasse uniformisiert. Man kann auch hier die Aufgabe dahin erweitern, daß man an gewissen Stellen der Fläche Verzweigungen vorschreibt und alle Funktionen mit den gegebenen Verzweigungen zu uniformisieren wunscht. Damit erhalt man aber zugleich neue Parameterdarstellungen von z und w selbst. Wir werden spater im zweiten Bande diese Probleme allgemein behandeln lernen; einige weitere Beispiele werden uns in diesem Buche schon begegnen.

5. Die Gruppe. Hier sei nur noch ein Blick auf die Parameterdarstellungen selbst geworfen. Die Uniformisierungsfragen haben uns in den periodischen und in den doppelperiodischen Funktionen zu Funktionen geführt, welche bei gewissen auf die unabhangige Variable ausgefuhrten linearen Transforma-

tionen ungeändert blieben. Dahin gehört auch die Funktion $w = z^m$, die bei den Transformationen $z = z_1 e^{\frac{2 i \pi}{m} h z}$ $(h = 0, 1 \ldots m - 1)$ ungeändert bleibt. Diese Transformationen, bei welchen eine eindeutige Funktion ungeändert bleibt, bilden stets eine *Gruppe von Transformationen.* Unter einer Gruppe hat man dabei in üblicher Weise ein System von Transformationen zu verstehen, von der Art, daß erstens die Zusammensetzung zweier Transformationen der Gruppe wieder eine Transformation der Gruppe ergibt. Sind also $z_1 = l_1(z)$ und $z_2 = l_2(z_1)$ zwei Transformationen, so ist $z_2 = l_2(l_1(z))$ eine zusammengesetzte. Daß diese die eindeutige Funktion $f(z)$ ungeändert läßt, wenn die beiden zusammensetzenden das tun, leuchtet ein. Zweitens aber muß das System so beschaffen sein, daß ihm auch die inverse Transformation einer jeden seiner Transformation angehört.

Funktionen, die bei solchen Gruppen linearer Transformationen ungeändert bleiben, die also für jede Transformation

$$z_1 = l_1(z)$$

der Gruppe der Funktionalgleichung

$$f(z_1) = f(z)$$

genügen, heißen *automorphe Funktionen* der Gruppe. Wir werden die einfachperiodischen und die doppelperiodischen Funktionen als Beispiele solcher automorpher Funktionen noch näher untersuchen.

Elfter Abschnitt.

Abriß einer Theorie der elliptischen Funktionen.

§ 1. Allgemeine Sätze über doppelperiodische Funktionen.

1. Vorbemerkung. Alle auf der zweiblättrigen Riemannschen Fläche der

$$\sqrt{a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4}$$

eindeutigen Funktionen von durchweg rationalem Charakter gehen durch die Abbildung der Fläche mit dem Integral erster Gattung in doppelperiodische Funktionen über, welche im Endlichen durchweg von rationalem Charakter sind. Diesen Zusatz „von durchweg rationalem Charakter“ lassen wir fortan beiseite, weil wir andere doppelperiodische Funktionen nicht betrachten werden. Jeder solchen doppelperiodischen Funktion entspricht umgekehrt eine eindeutige Funktion der Fläche, die in der Umgebung einer jeden Stelle derselben von rationalem Charakter ist. Mit einer Theorie der doppelperiodischen

Funktionen erhalten wir also zugleich eine Theorie dieser Funktionen auf der Riemannschen Fläche. Die doppelperiodischen und noch einige weiterhin zu nennende Funktionensorten begreift man unter dem Namen *elliptische Funktionen*. Die Theorie der doppelperiodischen Funktionen ist in manchen Stücken der Theorie der einfachperiodischen verwandt, in vielen Stücken aber auch einfacher als diese. Daher soll sie zuerst behandelt werden.

2. Satz I. *Eine jede nicht konstante doppelperiodische Funktion nimmt im Periodenparallelogramm einen jeden Wert gleich oft an.*[1])

Dabei hat man das Periodenparallelogramm so zu fixieren, daß ihm keine zwei um Perioden verschiedene Punkte angehören, d. h. von Randpunkten, die sich um Perioden unterscheiden, ist immer nur einer dem Parallelogramm zuzurechnen, also nur eine Ecke und von jedem parallelen Seitenpaar nur eine Seite. Da $f(u)$ ebensooft den Wert a annimmt, als $f(u) - a$ verschwindet, so genügt es, zu zeigen, daß die Anzahl der Pole einer doppelperiodischen Funktion mit der Zahl ihrer Nullstellen übereinstimmt. Um das zu beweisen, bedienen wir uns des Cauchyschen Residuensatzes. Um ihn anwenden zu können, wollen wir annehmen, daß auf dem Rande des Parallelogramms kein Pol und keine Nullstelle der Funktion liege. Durch eine geeignete Wahl der Lage des Parallelogramms kann dies immer erreicht werden. Bei einer Parallelverschiebung des Parallelogramms ändert sich nämlich die Zahl der ihm angehörenden Nullstellen und Pole nicht. Um dies etwa bei den Nullstellen einzusehen, bemerken wir, daß eine Änderung höchstens dann eintreten könnte, wenn beim Verschieben Nullstellen auf den Rand des Paralellogramms zu liegen kommen. Dann liegen aber auch in allen äquivalenten Randpunkten Nullstellen gleicher Vielfachheit der doppelperiodischen Funktion.[2]) Von diesen ist aber wegen der vorhin gegebenen Vorschrift stets nur eine zu zählen, denn von äquivalenten Randpunkten gilt stets nur einer als zum Parallelogramm gehörig. Verschiebt man nun ein solches Parallelogramm und rückt dabei eine der Nullstellen vom Rande nach außen, so rückt dafür eine äquivalente gleicher Vielfachheit ins Innere, so daß die Gesamtzahl der dem Parallelogramm angehörigen Nullstellen dieselbe bleibt. Das gleiche gilt auch, wenn bei der Verschiebung eine Nullstelle sich nur am Rande verschiebt. Durch eine solche Parallelverschiebung kann man nun aber stets erreichen, daß auf dem Rande

1) Ein solcher Satz gilt bei den einfachperiodischen Funktionen nicht. Das lehrt schon die Funktion e^z, welche im Periodenstreifen weder verschwindet noch unendlich wird. Freilich werden diese Werte als Grenzwerte erhalten, wenn man sich im Periodenstreifen dem unendlichfernen Punkt nähert. Vgl. auch S. 286.

2) Aus $f(u) = (u - a)^n f_1(u)$, $\quad f_1(a) \neq 0$ folgt nämlich

$$f(u + \omega) = (u + \omega - a)^n f_1(u + \omega), \quad f_1((a - \omega) + \omega) \neq 0$$

Analog sieht man, daß an äquivalenten Stellen Pole gleicher Vielfachheit liegen.

Nullstellen und Pole nicht liegen. Denn sowohl die Pole wie die Nullstellen liegen wegen des vorausgesetzten rationalen Charakters isoliert und periodisch verteilt.

Der Unterschied zwischen der Zahl der Pole und der Zahl der Nullstellen der Funktion $f(u)$ wird durch das uber den Rand des Parallelogramms im positiven Sinne erstreckte Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(u)}{f(u)}\,du$$

gegeben. $2\omega_1$ und $2\omega_2$ seien die Perioden.

Die Ableitung einer doppelperiodischen Funktion ist selbst doppelperiodisch. Denn aus

$$f(u+2\omega)=f(u)$$

folgt

$$f'(u+2\omega)=f'(u).$$

Daher ist der Integrand $\frac{f'(u)}{f(u)}$ doppelperiodisch.

Seien nun $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ zwei Integrationswege, die durch eine Periodenverschiebung $u = \zeta + 2\omega$ auseinander hervorgehen, so ist

$$\int_{\mathfrak{C}_1}\varphi(u)\,du=\int_{\mathfrak{C}_2}\varphi(\zeta+2\omega)\,d\zeta=\int_{\mathfrak{C}_2}\varphi(\zeta)\,d\zeta,$$

wenn 2ω eine der Perioden von $\varphi(u)$ ist. Fur die uber die Seiten des Parallelogramms der Fig. 68 erstreckten Integrale gilt daher

$$\int_{a}^{a+2\omega_1}\varphi(u)\,du=\int_{a+2\omega_2}^{a+2\omega_1+2\omega_2}\varphi(u)\,du$$

und

$$\int_{a}^{a+2\omega_2}\varphi(u)\,du=\int_{a+2\omega_1}^{a+2\omega_1+2\omega_2}\varphi(u)\,du.$$

Fügt man das alles zusammen, *so wird das über den Rand des Parallelogramms erstreckte*

$$\frac{1}{2\pi i}\int \varphi(u)\,du=0$$

für jede doppelperiodische Funktion $\varphi(u)$. Damit ist Satz I bewiesen, denn man braucht ja nur das eben gefundene Ergebnis auf die doppelperiodische Funktion $\frac{f'(u)}{f(u)}$ anzuwenden.

3. Zusatz zu Satz I. *Es gibt keine doppelperiodischen Funktionen mit nur einem (einfachen) Pol.* Denn eben wurde gezeigt, daß fur eine jede doppel-

periodische Funktion $\varphi(u)$ das uber den Rand des Periodenparallelogramms erstreckte $\int \varphi(u)\,du = 0$ ist. Hatte nun $\varphi(u)$ nur einen (einfachen) Pol, so wäre aber dies Integral nicht Null, sondern dem von Null verschiedenen Residuum dieses Poles gleich.

Wohl aber gibt es doppelperiodische Funktionen, welche an einer einzigen Stelle einen Pol, und zwar einen Doppelpol besitzen. Man erhält eine solche, wenn man eine Riemannsche Fläche abbildet, die im Unendlichfernen einen Verzweigungspunkt hat. Dann muß die Umkehrungsfunktion des Integrales erster Gattung an der Bildstelle des unendlichfernen Punktes einen Doppelpol haben.[1]) Sie besitzt offenbar keinen weiteren Pol im Periodenparallelogramm, da ja die Fläche nur diesen einzigen unendlichfernen Punkt hat. Man findet auch bestatigt, daß sie dann im Periodenparallelogramm jeden Wert gleich oft, nämlich zweimal, annimmt, weil es zu jedem z zwei Punkte der Fläche gibt.

4. Satz II. *Wenn die Funktion $f(u)$ im Parallelogramm den Wert a an den Stellen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$, den Wert b an den Stellen $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n$ annimmt, und dabei jede Stelle so oft notiert ist, als es der Vielfachheit des dort angenommenen Wertes entspricht, so ist $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$ bis auf ein Multiplum der Perioden.*

Ich darf wieder annehmen, daß $a = 0$ und $b = \infty$ sei. Dann wird

$$\sum \alpha_i - \sum \beta_i = \frac{1}{2\pi i} \oint u \frac{f'(u)}{f(u)}\,du,$$

wenn dabei das Integral uber den Rand des Parallelogramms im positiven Sinne erstreckt wird. Denn an einer Nullstelle $\alpha_\varkappa$ ist nach S. 178 das Residuum von $u\frac{f'(u)}{f(u)}$ gleich $\alpha_\varkappa$, an einer Polstelle $\beta_\varkappa$, aber gleich $-\beta_\varkappa$. Andererseits aber wird fur das Parallelogramm der Fig. 68

$$\int_{a+2\omega_2}^{a+2\omega_1+2\omega_2} u \frac{f'(u)}{f(u)}\,du = \int_a^{a+2\omega_1} (\zeta + 2\omega_2) \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta,$$

also
$$\int_{a+2\omega_2}^{a+2\omega_1+2\omega_2} u \frac{f'(u)}{f(u)}\,du - \int_a^{a+2\omega_1} u \frac{f'(u)}{f(u)}\,du = 2\omega_2 \int_a^{a+2\omega_1} \frac{f'(u)}{f(u)}\,du.$$

Ferner
$$\int_{a+2\omega_1}^{a+2\omega_1+2\omega_2} u \frac{f'(w)}{f(w)}\,du = \int_a^{a+2\omega_2} (\zeta + 2\omega_1) \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta.$$

1) Die Bestatigung durch Umkehrung der S. 244 gegebenen Reihenentwicklungen sei eine Aufgabe für den Leser.

Also $$\int\limits_{a+2\omega_1}^{a+2\omega_1+2\omega_2} u\frac{f'(u)}{f(u)}\,du - \int\limits_{a}^{a+2\omega_2} u\frac{f'(u)}{f(u)}\,du = 2\omega_1\int\limits_{a}^{a+2\omega_2}\frac{f'(u)}{f(u)}\,du.$$

Dann wird $$\int\limits_{\circlearrowleft} u\frac{f'(u)}{f(u)}\,du = 2\omega_1\int\limits_{a}^{a+2\omega_2}\frac{f'(u)}{f(u)}\,du - 2\omega_2\int\limits_{a}^{a+2\omega_1}\frac{f'(u)}{f(u)}\,du.$$

Nun ist aber das unbestimmte $\int\frac{f'(u)}{f(u)}\,du = \log f(u)$. Trägt man die Grenzen a und $a+2\omega_1$ oder $a+2\omega_2$ ein, so erhält man jedesmal die Wertänderung des $\log f(u)$ bei Durchlaufung eines geschlossenen Weges der $f(u)$-Ebene. Denn $f(u)$ nimmt als doppelperiodische Funktion für die obere und die untere Integralgrenze jedesmal denselben Wert an. Daher wird nun tatsächlich $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\circlearrowleft} u\frac{f'(u)}{f(u)}\,du = h2\omega_1 + k2\omega_2$, wenn man unter h und k zwei passende ganze Zahlen versteht. Damit ist auch Satz II bewiesen.

5. Folgerungen. Eine jede doppelperiodische Funktion ist bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, wenn man ihre Nullstellen und Pole und die Vielfachheit einer jeden dieser Stellen kennt. Denn der Quotient zweier diesen Angaben genügender Funktionen ist doppelperiodisch und hat weder Nullstellen noch Pole, ist also konstant.

Eine doppelperiodische Funktion ist bis auf eine additive Konstante bestimmt, wenn man ihre Polstellen und an jeder den Hauptteil, d. h. die Glieder negativer Potenz ihrer Laurententwicklung kennt. Denn die Differenz zweier Funktionen, die diesen Angaben genügen, ist wieder polfrei und also konstant.

6. Schlußbemerkung. Wir werden nun weiter untersuchen, ob es doppelperiodische Funktionen mit beliebig gegebenen Nullstellen und Polen (natürlich unter der durch den Satz II gegebenen Bedingung) gibt, und ob man die Pole und die negativen Glieder der Laurententwicklung wirklich beliebig vorschreiben kann, ob also die in diesem Paragraphen angegebenen Sätze die einzigen Beschränkungen enthalten. Dies gelingt uns auf Grund der analytischen Darstellung der doppelperiodischen Funktionen durch unendliche Reihen. Der wenden wir uns jetzt zu.

§ 2. Analytische Darstellung der doppelperiodischen Funktionen.

1. Der Grundgedanke. Das allgemeine Prinzip zur Herstellung doppelperiodischer Funktionen ist folgendes. Wenn $f(u)$ irgendeine in der ganzen endlichen Ebene analytische Funktion von rationalem Charakter ist, so bilde man die Summe

$$F(u) = \sum_{h,k} f(u + h2\omega_1 + k2\omega_2)$$

über alle Perioden. Diese Funktion $F(u)$ ist dann sicher doppelperiodisch, wenn die Reihe gleichmäßig und unbedingt konvergiert. Denn vermehrt man die Variable u um eine Periode, so hat dies nur eine Änderung der Reihenfolge der Reihenglieder zur Folge. Daher beginnen wir mit einem Konvergenzsatz, um dann, auf ihn gestützt, doppelperiodische Funktionen wirklich herzustellen.

Fig. 74.

2. Konvergenzsatz. *Die über alle von Null verschiedenen Perioden erstreckte Summe* $\sum \left(\frac{1}{2\omega}\right)^n$ *konvergiert für* $n > 2$ *absolut.*

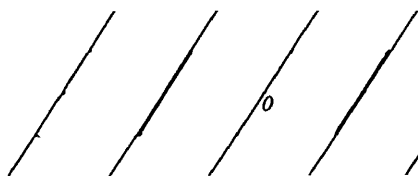



Fig. 75.

Zum Beweise bringen wir die Reihenglieder in eine bequeme Anordnung. An den Punkt $u = 0$ stoßen vier Periodenparallelogramme an. Ihre von Null verschiedenen Ecken machen den ersten Kranz von Perioden aus (Fig. 74). R und r mögen die aus Fig. 74 ersichtliche Bedeutung größter und kleinster Abstände haben. Dann ist für diese acht Perioden

$$r \leqq |2\omega| \leqq R.$$

Wir gehen zum zweiten Kranz über, indem wir alle an diese vier ersten anstoßenden Periodenparallelogramme hinzunehmen. Auf dem Rand des so entstehenden großen Parallelogramms (Fig. 75) liegen dann $2 \cdot 8 = 16$ Perioden. Für diese gilt

$$2r \leqq |2\omega| \leqq 2R$$

Wir lagern einen neuen Kranz von Parallelogrammen an und erhalten $3 \cdot 8 = 24$ weitere Perioden. Für diese wird

$$3r \leqq |2\omega| \leqq 3R.$$

Nun wollen wir die Glieder der Reihe $\sum \left(\frac{1}{2\omega}\right)^n$ so anordnen, daß wir erst die Perioden des ersten, dann die des zweiten, dann die des dritten usw. Kranzes nehmen. Die sich auf die $\varkappa$ ersten Kränze beziehende Teilsumme der absoluten Beträge $s_\varkappa$ genügt dann den Ungleichungen:

$$\frac{8}{R^n}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{\varkappa^{n-1}}\right) \leqq s_\varkappa \leqq \frac{8}{r^n}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}}+\cdots\frac{1}{\varkappa^{n-1}}\right).$$

Daraus erkennt man klar die Richtigkeit unserer Behauptung, daß die Reihe $\sum \left(\frac{1}{2\omega}\right)^n$ für $n > 2$ absolut konvergiert. Man sieht auch, daß sie für $n \leqq 2$ jedenfalls nicht mehr absolut konvergiert.

3. Ein weiterer Konvergenzsatz. Wir wenden dies Ergebnis nun an, um die Konvergenz der uber alle Perioden erstreckten Summe

$$\sum\left(\frac{1}{u-2\omega}\right)^n$$

zu untersuchen. Wir beschranken u auf einen Kreis $|u| \leqq P$. Wir zerlegen die Reihe in zwei Teile. In den ersten aus endlichvielen Gliedern bestehenden Teil nehmen wir die Glieder auf, welche fur $|u| \leqq P$ Pole besitzen; das sind also die zu den Perioden $|2\omega| \leqq P$ gehörigen Reihenglieder. In den zweiten Teil nehmen wir alle ubrigen Reihenglieder. Ich behaupte nun, daß dieser zweite Teil fur $n > 2$ in $|u| \leqq P$ absolut und gleichmaßig konvergiert.

Zum Beweis bemerke ich, daß es eine Zahl M gibt, so daß fur alle $|u| \leqq P$ und alle Perioden $|2\omega| > P$ stets

$$\left|\frac{1}{u-2\omega}\right|^n < \frac{M}{|2\omega|^n}$$

gilt. Um dies einzusehen, betrachte ich die Perioden, deren absoluter Betrag großer als P ist. Unter allen ihren absoluten Betragen gibt es einen kleinsten $P+d$, der noch großer ist als P. Das folgt daraus, daß in jedem endlichen Bezirk nur endlichviele Periodenpunkte liegen (S. 247/248) Daher wird nun für alle $|u| \leqq P$ und alle $|2\omega| \geqq P+d$ stets

$$\left|\frac{u-2\omega}{2\omega}\right| \geqq 1 - \left|\frac{u}{2\omega}\right| \geqq 1 - \frac{P}{P+d}.$$

Daraus folgt
$$\left|\frac{u-2\omega}{2\omega}\right|^n \geqq \left(1-\frac{P}{P+d}\right)^n = \frac{1}{M}.$$

Daher wird
$$\left|\frac{1}{u-2\omega}\right|^n < \frac{1}{|2\omega|^n}$$

für alle $|u| \leqq P$ und alle $|2\omega| > P$. Das ist eine fur alle Glieder der zu untersuchenden Reihe

$$\sum_{|2\omega|>P}\left(\frac{1}{u-2\omega}\right)^n$$

geltende Abschätzung. Diese läßt aber bekanntlich ihre absolute und gleichmaßige Konvergenz aus der Konvergenz der Reihe $\sum\left|\frac{1}{2\omega}\right|^n$ erschließen.

Nehmen wir nun für n eine ganze Zahl. Nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz (S. 155) stellt dann diese Reihe, deren gleichmaßige Konvergenz wir eben nachgewiesen haben, eine fur $|u| \leqq P$ reguläre analytische Funktion dar. Die weggelassenen endlichvielen Glieder aber machen eine rationale Funktion aus. Da P beliebig gewählt werden kann, stellt unsere Reihe in der ganzen endlichen Ebene eine regulär analytische Funktion von durchweg rationalem

harakter dar. Diese analytische Funktion ist nun aber nach dem schon ingangs erwähnten Prinzip doppelperiodisch. Sie besitzt bei $u = 0$ einen -fachen Pol und ist also eine n-wertige doppelperiodische Funktion. Die eringstwertige derart erhaltene Funktion ist dreiwertig. Nach Weierstraß ezeichnet man ihr -2-faches mit $\wp'(u)$. Wir haben also in

$$\wp'(u) = \sum \frac{-2}{(u-2\omega)^3}$$

ine dreiwertige doppelperiodische Funktion gefunden.

4. Eine zweiwertige doppelperiodische Funktion. Schon die Schreibweise eutet an, daß $\wp'(u)$ die Ableitung einer zweiwertigen doppelperiodischen unktion ist. Diese wollen wir bestimmen. Ich spalte von der Reihe $\sum \frac{-2}{(u-2\omega)^3}$ das auf die Periode Null sich beziehende Glied ab und beeichne[1]) die übrige Reihe mit $\sum' \frac{-2}{(u-2\omega)^2}$. Dann setze ich

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \int_0^u \left(\wp'(v) + \frac{2}{v^3}\right) dv = \frac{1}{u^2} + \int_0^u \sum' \frac{-2}{(v-2\omega)^3}\, dv.$$

lso wird
$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum' \left\{\frac{1}{(u-2\omega)^3} - \frac{1}{(2\omega)^2}\right\}.$$

ach dem Zusatz S. 109 konvergiert diese Reihe absolut und gleichmäßig. as ist jedenfalls eine Funktion, deren Ableitung $\wp'(u)$ ist. Ist aber diese unktion doppelperiodisch? Auf alle Fälle ist für jede Periode 2ω die Differenz $(u + 2\omega) - \wp(u)$ konstant. Denn die Ableitung $\wp'(u + 2\omega) - \wp'(u)$ ist Null. *un ist aber* $\wp(-u) = \wp(u)$, also $\wp(u)$ *eine gerade Funktion.* Zu jeder Periode ω gehört nämlich eine ihr bis aufs Vorzeichen gleiche Periode. Beide geben den Reihengliedern $\frac{1}{(u-2\omega)^2} - \frac{1}{(2\omega)^2}$ und $\frac{1}{(u+2\omega)^2} - \frac{1}{(2\omega)^2}$ Veranlassung. eide tauschen nur ihre Plätze, wenn u sein Vorzeichen ändert.[2]) Daher ist amentlich $\wp(-\omega) = \wp(\omega)$. Trägt man nun $u = -\omega$ in der Gleichung $(u + 2\omega) - \wp(u) = C$ ein, so findet man $C = \wp(\omega) - \wp(-\omega) = 0$. Daher t $\wp(u)$ doppelperiodisch.

Man kann auch leicht die Punkte der u-Ebene bestimmen, in welchen $'(u)$ verschwindet. Dazu muß man nur beachten, daß $\wp'(u)$ eine ungerade unktion ist: also $\wp'(-u) = -\wp'(u)$. Da nun aber weiter $\wp'(u + 2\omega) = \wp'(u)$ lt, so wird für $u = -\omega$. $\wp'(\omega) = \wp'(-\omega) = -\wp'(\omega)$. Also muß $\wp'(\omega) = 0$

1) Der Strich an dem nun folgenden Summenzeichen soll also andeuten, daß bei der immation die Periode $2\omega = 0$ beiseite bleibt.

2) Ebenso erkennt man in $\wp'(u)$ eine ungerade Funktion, wie das ja für die Ableitung ner geraden Funktion sein muß

oder $= \infty$ sein. Da aber $\wp'(u)$ in den Periodenpunkten 2ω seine Pole hat, liegen die Nullstellen bei den Halbperioden ω. Diese gehen aber durch Periodenvermehrung aus den drei speziellen Halbperioden

$$\omega_1, \; \omega_2, \; \omega_1 + \omega_2$$

hervor, welche allein dem Periodenparallelogramm angehören (vgl. die Erklärung auf S. 250).

§ 3. Das Umkehrproblem.

1. Formulierung. Das Studium der elliptischen Integrale erster Gattung führte uns zu den doppelperiodischen Funktionen. Gehört nun umgekehrt zu jeder Wahl der Perioden eine zweiblättrige Riemannsche Fläche und ein Integral erster Gattung, das diese Perioden besitzt? Diese Frage bezeichnet man als *Umkehrproblem*.

2. Abbildung des Periodenparallelogramms durch $\wp(u)$. Die Kenntnis der beiden Funktionen $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ gibt uns die Mittel zur Lösung des Umkehrproblems. Jedenfalls nämlich bildet die Funktion $\wp = \wp'(u)$ das Periodenparallelogramm auf eine zweiblättrige Riemannsche Fläche ab. Denn $\wp(u)$ nimmt ja jeden Wert zweimal an. Diese Fläche besitzt vier Verzweigungspunkte. Der eine liegt im Unendlichfernen. Denn bei $u = 0$ hat $\wp(u)$ einen Doppelpol. Die drei anderen liegen im Endlichen. Daß es drei sind, ergibt sich daraus, daß nach S. 268 an drei Stellen die Ableitung $\wp'(u)$ verschwindet. Diese drei Verzweigungspunkte der $\wp$-Fläche haben die Eigenschaft, daß die Summe ihrer Koordinaten verschwindet. Denn diese Summe wird nach dem Residuensatz durch das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\circlearrowleft} \wp(u)\,\frac{\wp''(u)}{\wp'(u)}\,du$$

gegeben. An der Stelle $u = 0$ hat nämlich der Integrand das Residuum Null. Denn nach der S. 268 gegebenen Definition von $\wp(u)$ gilt bei $u = 0$

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + \cdots,$$

weil $\wp(u) - \frac{1}{u^2}$ bei $u = 0$ verschwindet, und weil $\wp(u)$ eine gerade Funktion ist. Daher wird bei $u = 0$

$$\wp(u)\,\frac{\wp''(u)}{\wp'(u)} = -\frac{3}{u^3} - 7c_2\,u + \cdots.$$

Das Integral verschwindet aber nach S. 268, weil der Integrand doppelperiodisch ist.

Die drei Verzweigungspunkte $e_1 = \wp(\omega_1)$, $e_2 = \wp(\omega_2)$, $e_3 = \wp(\omega_1 + \omega_2)$ sind natürlich voneinander verschieden. Denn die $\wp$-Funktion nimmt ja einen jeden Wert genau zweimal an. Der Wert e_1 z. B. wird aber an der Stelle ω_1 schon doppelt angenommen, weil ja $\wp'(\omega_1) = 0$ ist.

3. $\wp(u)$ als Umkehrung eines Integrals erster Gattung. Die dargelegte Abbildungseigenschaft läßt vermuten, daß $\wp = \wp(u)$ die Umkehrungsfunktion eines Integrales erster Gattung ist, und lenkt so unsere weiteren Überlegungen in eine bestimmte Richtung. Man findet ja tatsächlich

$$\frac{du}{d\wp} = \frac{1}{\wp'(u)}.$$

Also ist

$$u = \int\limits_{\infty}^{\wp} \frac{dp}{\wp'},$$

weil ja der Punkt $\wp = \infty$ in $u = 0$ übergeht. Man vermutet daher, daß $\wp'$ sich als eine Quadratwurzel aus einem Polynom dritten Grades in $\wp'$ wird darstellen lassen. Diese Vermutung wird durch die folgenden Überlegungen bestätigt. Zu der zweiblättrigen Riemannschen Fläche mit den Verzweigungspunkten e_1, e_2, e_3, ∞ gehört ein Integral erster Gattung $v(\wp)$, das die Fläche auf eine schlichte v-Ebene abbildet. Dieses Integral wähle ich in der Form $v = \int\limits_{\infty}^{\wp} \frac{dp}{\sqrt{a_0 p^3 + a_2 p + a_3}}$, weil es auch den unendlichfernen Verzweigungspunkt auf $v = 0$ abbilden muß, und weil die Koordinatensumme der endlichen Verzweigungspunkte Null ist. Die Umkehrungsfunktion $\wp = f(v)$ hat auch bei $v = 0$ einen Doppelpol. Ich will die Glieder negativer Potenz in ihrer Laurententwicklung bestimmen, um $f(v)$ mit $\wp(u)$ zu vergleichen. Man findet

$$\frac{1}{\sqrt{a_0 p^3 + a_2 p + a_3}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \frac{1}{p^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a_2}{a_0}\frac{1}{p^2} + \frac{a_3}{a_0}\frac{1}{p^3}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a_0}} \frac{1}{p^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{a_2}{2a_0}\frac{1}{p^2} - \frac{a_3}{2a_0}\frac{1}{p^3} + \cdots\right).$$

Also durch gliedweises Integrieren

$$v = -\frac{2}{\sqrt{a_0}} \frac{1}{\sqrt{\wp}} \left(1 - \frac{a_2}{10 a_0} \frac{1}{\wp^2} - \cdots\right).$$

Also wird

$$v^2 = \frac{4}{a_0}\frac{1}{\wp} - \frac{4 a_2}{5 a_0^2}\frac{1}{\wp^3} - \cdots.$$

Zur Auflosung nach $\wp$ macht man den Ansatz: $\frac{1}{\wp} = \mathfrak{P}(v^2)$, also

$$\frac{1}{\wp} = c_1 v^2 + c_2 v^4 + \cdots.$$

Durch Einsetzen erhält man

$$v^2 = \frac{4c_1}{a_0} v^2 + \frac{4c_2}{a_0} v^4 + \cdots.$$

Also wird
$$c_1 = \frac{a_0}{4}, \quad c_2 = 0, \ldots$$

Das liefert
$$\wp = f(v) = \frac{4}{a_0}\frac{1}{v^2}\left(1 - \frac{a_2 a_0}{5 \cdot 4^2} v^4 - \cdots\right).$$

Es ist aber auch
$$\wp(u) = \frac{1}{u^2}\left(1 + B_2 u^4 + B_3 u^6 + \cdots\right),$$

weil $\wp(u)$ eine gerade Funktion ist, und weil $\wp(u) - \frac{1}{u^2}$ bei $u = 0$ verschwindet. Wähle ich also oben den Koeffizienten $a_0 = 4$, was mir durchaus freisteht, da es nur auf eine Multiplikation des Integrales mit einem konstanten Faktor hinauskommt, setze ich also

$$v = \int_\infty^\wp \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}},$$

so wird
$$f(v) = \frac{1}{v^2}\left(1 + \frac{g_2}{20} v^4 + \cdots\right).$$

So erreiche ich, daß die Entwicklungen von $f(v)$ bei $v = 0$ und von $\wp(u)$ bei $u = 0$ gleichlautende Glieder negativer und nullter Potenz enthalten.

Nun kann der Beweis leicht zu Ende geführt werden. Ich betrachte u als Funktion von v. u ist eine Funktion von $\wp$, die auf der Fläche überall von rationalem Charakter ist. Sie wird daher bei der Abbildung der Fläche durch das Integral v eine eindeutige Funktion $u(v)$. Aus demselben Grunde aber ist die Umkehrungsfunktion $v(u)$ eindeutig. Daher muß $u(v)$ linear sein; denn $u(v)$ vermittelt eine umkehrbar eindeutige Abbildung der u-Ebene auf die v-Ebene. Da aber überhaupt nur die endlichen v und die endlichen u an der Abbildung beteiligt sind, so muß diese Funktion ganz und linear sein. Also $u(v) = \alpha v + \beta$. Bei der Abbildung entsprechen aber die Nullpunkte beider Ebenen einander. Denn sowohl $u(\wp)$ wie $v(\wp)$ bilden den unendlichfernen Punkt der Riemannschen Fläche auf den Nullpunkt ihrer Ebene ab. Also hat die lineare Funktion die Gestalt $u = \alpha v$. Trägt man also $u = \alpha v$ in die Funktion $\wp(u)$ ein, so muß $f(v)$ entstehen. Es wird aber

$$\wp(\alpha v) = \frac{1}{\alpha^2 v^2}\left(1 + B_2 \alpha^4 v^4 + \cdots\right).$$

Soll das aber mit
$$\frac{1}{v^2}\left(1+\frac{g_2}{20}v^4+\cdots\right)$$
übereinstimmen, so muß $\alpha = \pm 1$, $B_2 = \frac{g_2}{20}$ sein, und die Entwicklung von $\wp(u)$ wird also
$$\wp(u) = \frac{1}{u^2}\left(1+\frac{g_2}{20}u^4+\cdots\right)$$

Wir haben damit folgendes Gesamtergebnis gewonnen: *Die Funktion $\wp(u)$ bildet das Periodenparallelogramm umkehrbar eindeutig auf eine geschlossene zweiblättrige Fläche mit vier verschiedenen Verzweigungspunkten ab. Einer davon liegt im Unendlichen. Die Koordinatensumme der drei endlichen ist Null. Das Integral erster Gattung $u = \int\limits_\infty^z \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}$ dieser Fläche ist die Umkehrung der $\wp$-Funktion.*

Ist umgekehrt eine zweiblättrige Fläche der angegebenen Art vorgelegt, so wird die Umkehrungsfunktion ihres Integrales erster Gattung
$$u = \int\limits_\infty^z \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}$$
die Funktion $z = \wp(u)$. Wie wir nämlich schon S. 271 betonten, stimmt die Laurententwicklung der Umkehrungsfunktion in der Umgebung des Punktes $u = 0$ in den Gliedern negativer und nullter Potenz mit der Entwicklung der Funktion $\wp(u)$ überein. Sie sind außerdem doppelperiodische Funktionen mit denselben Perioden. Ihre Differenz ist also konstant, verschwindet aber für $u = 0$, wie die Gleichheit der Absolutglieder lehrt. Also ist tatsächlich $\wp(u)$ mit der Umkehrungsfunktion identisch.

4. Die Weierstraßsche Normalform. Unsere Betrachtungen haben eine besondere Sorte von zweiblättrigen Flächen als besonders wichtig erkennen lassen. Das sind die Flächen, welche einen Verzweigungspunkt im Unendlichen und drei im Endlichen haben, doch derart, daß ihre Koordinatensumme Null ist, d. h., daß der Schwerpunkt des von ihnen gebildeten Dreieckes im Koordinatenanfang liegt. Wir wollen diese Gestalt der Fläche und ihr Integral erster Gattung *Weierstraßsche Normalform* nennen. Weierstraß, der geniale Mathematiker, dem die moderne Mathematik ein gutes Teil ihrer begrifflichen Schärfe verdankt, war es nämlich, der die Bedeutung gerade dieser Normalform erkannte. Sie liegt einmal darin, daß die Funktion $\wp(u)$ unter allen eine besonders einfache analytische Darstellung besitzt, ferner aber noch besonders darin, daß man jede zweiblättrige Fläche mit vier Verzweigungspunkten unschwer auf eine der Weierstraßschen Normalformen abbilden kann. Man beherrscht also

mit der Parameterdarstellung oder Uniformisierung der Weierstraßschen Normalform zugleich alle übrigen elliptischen Gebilde.

Die erwähnte Abbildung kann durch eine lineare Funktion bewirkt werden. Wenn wir nämlich in $w^2 = a_0(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3)(z - \alpha_4)$ die lineare Substitution $z = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = l(z_1)$ mit der Umkehrung $z_1 = l^{-1}(z)$ ausüben, so erhalten wir

$$\begin{aligned} w^2 &= a_0(l(z_1) - \alpha_1)(l(z_1) - \alpha_2)(l(z_1) - \alpha_3)(l(z_1) - \alpha_4) \\ &= a_0(z_1 - l^{-1}(\alpha_1))(z_1 - l^{-1}(\alpha_2))(z_1 - l^{-1}(\alpha_3))(z_1 - l^{-1}(\alpha_4)) \\ &\qquad \cdot \frac{(a - \alpha_1 c)(a - \alpha_2 c)(a - \alpha_3 c)(a - \alpha_4 c)}{(cz_1 + d)^4} \\ &= w_1^2(z_1)\frac{(a - \alpha_1 c)(a - \alpha_2 c)(a - \alpha_3 c)(a - \alpha_4 c)}{(cz_1 + d)^4} = \frac{A}{(cz_1 + d)^4} w_1^2(z_1). \end{aligned}$$

Die Verzweigungspunkte der neuen Funktion $w_1(z_1)$ liegen an denjenigen Stellen, an welchen das Polynom unter der Wurzel verschwindet. Das sind die Stellen $l^{-1}(\alpha_\varkappa)$, welche aus den Stellen $\alpha_\varkappa$ durch die lineare Abbildung $l^{-1}(z)$ hervorgehen. Durch die umkehrbar eindeutige Abbildung

$$z = l(z_1), \quad w = \frac{\sqrt{A}}{(cz_1 + d)^2} w_1$$

gehen also die beiden Riemannschen Flächen auseinander hervor. Was wird bei dieser Abbildung aus dem Integral erster Gattung? Um das zu sehen, haben wir auch dort die lineare Abbildung vorzunehmen. Dabei findet man

$$\int_{\alpha_4}^{z} \frac{d\mathfrak{z}}{w} = \frac{ad - bc}{\sqrt{A}} \int_{l^{-1}(\alpha_4)}^{z_1} \frac{d\mathfrak{z}_1}{w_1}$$

Die Integrale erster Gattung sind also bis auf den konstanten Faktor

$$\frac{ad - bc}{\sqrt{A}} \quad \text{einander gleich.}$$

Durch eine passend gewählte lineare Abbildung kann man nun stets erreichen, daß die neue Riemannsche Fläche die Weierstraßsche Normalform besitzt. Am besten sieht man das ein, wenn man die Abbildung, die das leistet, in zwei Schritten ausführt. Der erste Schritt besteht darin, einen der Verzweigungspunkte ins Unendliche zu bringen. Dabei nehmen die drei anderen drei bestimmte endliche Plätze ein. Durch eine Parallelverschiebung kann man dann den Schwerpunkt des von ihnen gebildeten Dreieckes nach dem Koordinatenanfang bringen. Damit ist die Weierstraßsche Normalform erreicht. Ist

nun $w_1 = \wp'(u)$, $z_1 = \wp(u)$ eine Parameterdarstellung derselben und $z = l(z_1)$, $w = \frac{\sqrt{A}}{(cz_1 + d)^2} w_1$ die Abbildung, die die gegebene Funktion $w(z)$ in sie überführt, so wird

$$w = \frac{\sqrt{A}}{(c\wp(u) + d)^2}\wp'(u), \quad z = l(\wp(u))$$

eine Uniformisierung von $w = w(z)$.

§ 4. Die elliptische ζ-Funktion und das Normalintegral zweiter Gattung.

1. Definition. Die elliptische ζ-Funktion ist ein Integral der negativen $\wp$-Funktion. Wir erklären

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum_\omega{}' \left(\frac{1}{u - 2\omega} + \frac{1}{2\omega} + \frac{u}{4\omega^2}\right) = \frac{1}{u} - \int_0^u \sum{}' \left(\left(\frac{1}{\mathfrak{z} - 2\omega}\right)^2 - \frac{1}{4\omega^2}\right) d\mathfrak{z}.$$

Dann wird also $\zeta'(u) = -\wp(u)$. Die Reihe konvergiert nach S. 109 absolut. Diese Funktion ist nicht mehr doppelperiodisch mit den Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_2$. Denn sie besitzt im Periodenparallelogramm nur einen einfachen Pol, und wir sahen S. 263, daß es derartige doppelperiodische Funktionen nicht gibt. Da aber ihre Ableitung doppelperiodisch ist, so kann sie bei Periodenvermehrungen der unabhängigen Variablen nur um Konstanten zunehmen. Wir setzen $\zeta(u + 2\omega_1) - \zeta(u) = 2\eta_1$ und $\zeta(u + 2\omega_2) - \zeta(u) = 2\eta_2$

2. Die Legendresche Relation. Diese Zahlen η_1 und η_2 genügen der wichtigen *Legendreschen Relation*

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2}.$$

Um sie abzuleiten, betrachten wir das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \zeta(u)\,du,$$

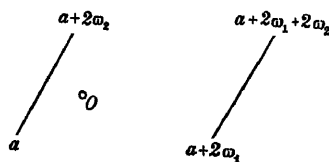



Fig. 76.

erstreckt im positiven Sinne über den Rand eines Periodenparallelogramms. Man kann es auf zwei verschiedene Weisen auswerten. Einmal ist es dem Residuum der ζ-Funktion an der Stelle $u = 0$ gleich, welche wir also im Parallelogramm gelegen denken, also gleich 1. Ferner haben wir (Fig. 76)

$$\int_{a+2\omega_2}^{a+2\omega_2+2\omega_1} \zeta(u)\,du = \int_a^{a+2\omega_1} \zeta(u_1 + 2\omega_2)\,du_1 = \int_a^{a+2\omega_1} \zeta(u)\,du + 4\eta_2\omega_1$$

und

$$\int_{a+2\omega_1}^{a+2\omega_1+2\omega_2} \zeta(u)\,du = \int_a^{a+2\omega_2} \zeta(u + 2\omega_1)\,du_1 = \int_a^{a+2\omega_2} \zeta(u)\,du + 4\eta_1\omega_2.$$

Also finden wir durch Zerlegung von $\int\zeta(u)\,du$ in die Summe der Integrale über die vier Seiten

$$\frac{1}{2\pi i}\int \zeta(u)\,du = \frac{4\eta_1\omega_2 - 4\eta_2\omega_1}{2\pi i}.$$

Also wird
$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2}.$$

3. $\zeta(\omega_i) = \eta_i$. Die Funktion $\zeta(u)$ ist als Integral der geraden $\wp$-Funktion eine ungerade Funktion, d. h. also, sie genügt der Funktionalgleichung $\zeta(-u) = -\zeta(u)$. Dies läßt sich auch ähnlich einsehen wie S. 268 der gerade Charakter der $\wp$-Funktion, und zwar wieder auf Grund der Tatsache, daß mit jeder Periode 2ω auch -2ω eine Periode ist. Fassen wir aber die beiden zugehörigen Glieder der Reihe $\zeta(u)$ zusammen, so haben wir

$$\frac{1}{u-2\omega} + \frac{1}{2\omega} + \frac{u}{4\omega^2} + \frac{1}{u+2\omega} - \frac{1}{2\omega} + \frac{u}{4\omega^2},$$

und das wechselt mit u zugleich sein Vorzeichen.

Diese Bemerkung ermöglicht es, die Zahlen $2\eta_1$ und $2\eta_2$ mit den Werten $\zeta(\omega_1)$ und $\zeta(\omega_2)$ in Zusammenhang zu bringen. Trägt man nämlich in

$$\zeta(u+2\omega_1) = \zeta(u) + 2\eta_1$$

$u = -\omega_1$ ein, so wird $\zeta(\omega_1) - \zeta(-\omega_1) = 2\eta_1$. Also $\eta_1 = \zeta(\omega_1)$. Ebenso findet man $\eta_2 = \zeta(\omega_2)$.

4. Integral zweiter Gattung. Bilden wir nun das Periodenparallelogramm durch die $\wp$-Funktion auf eine zweiblättrige Fläche ab, so wird aus $\zeta(u)$ eine Funktion der Fläche, die in der Umgebung einer jeden Stelle von rationalem Charakter ist, an einer Stelle ($z=\infty$) einen einfachen Pol besitzt, und die ebensowenig wie das Integral erster Gattung eine eindeutige Funktion der Fläche ist. Um sie durch z und w darzustellen, beachten wir, daß

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{d\zeta}{du}\cdot\frac{du}{dz} = -\wp(u)\cdot\frac{1}{\wp'(u)} = \frac{-z}{w}.$$

Also wird $\zeta = -\int^{z}\frac{z\,dz}{w}$. Die untere Grenze des Integrales bleibt dabei unbestimmt. Wir haben ja auch zu Beginn bei Erklärung der ζ-Funktion das Integral nicht durch Wahl der unteren Grenze, sondern in anderer Weise fixiert. Wir wollen uns hier nicht weiter mit der Bestimmung der Integrationskonstanten befassen. Es genügt uns, in ζ ein Integral der Fläche, das sogenannte *Normalintegral zweiter Gattung*, erkannt zu haben. Dabei versteht

man allgemein unter einem Integral zweiter Gattung ein mit Polen versehenes Integral, das aber durchweg von rationalem Charakter ist. Das hier vorgelegte besitzt nur einen einfachen Pol im Unendlichen.

§ 5. Darstellung der doppelperiodischen Funktionen durch $\wp(u)$ und $\wp'(u)$.

1. Eine Hilfsfunktion. Man kann doppelperiodische Funktionen mit zwei verschiedenen einfachen Polen angeben. Man betrachte z. B. die Funktion

$$\varphi_1(u,v) = \frac{1}{2}\,\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}.$$

Sie besitzt als Funktion von u zwei einfache Pole, deren einer bei $u = 0$, deren anderer bei $u = -v$ liegt. Denn bei $u = 0$ hat man

$$\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)} = \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{-2}{u^3}-\wp'(v)+u\,\mathfrak{P}(u)}{\dfrac{1}{u^2}-\wp(v)+u^2\,\mathfrak{P}_1(u)} = \frac{-1}{u} + u\,\mathfrak{P}(u).$$

Bei $u = 0$ liegt also ein einfacher Pol mit dem Residuum -1. Pole können weiter an den Stellen liegen, wo der Nenner verschwindet. Das sind die Stellen $u = +v$ und $u = -v$. Bei $u = +v$ verschwindet aber auch der Zähler, und zwar, wie man sofort sieht, so, daß dort kein Pol der Funktion liegt. Bei $u = -v$ aber erhält man

$$\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)} = \frac{1}{2}\,\frac{\wp'(-v)-\wp'(v)+\wp''(-v)\,(u+v)+\cdots}{\wp(-v)-\wp(v)+\wp'(-v)\,(u+v)+\cdots}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2\wp'(-v)+\wp''(-v)\,(u+v)+\cdots}{\wp'(-v)\,(u+v)+\dfrac{\wp''(-v)}{2}\,(u+v)^2+\cdots} = \frac{2}{u+v} + (u+v)\,\mathfrak{P}(u+v).$$

Also bei $u = -v$ liegt ein einfacher Pol mit dem Residuum 1. Dies ist ersichtlich auch für den Fall richtig, daß $\wp'(-v)$ verschwinden sollte. Denn die drei Nullstellen von $\wp'$ sind einfach so daß $\wp''$ in keiner derselben verschwindet.

2. Doppelperiodische Funktionen mit einem einzigen Pol von gegebenem Hauptteil. Die Kenntnis dieser Funktion φ_1 erlaubt es nun, doppelperiodische Funktionen zu konstruieren, welche an beliebig gegebenen Stellen Pole mit beliebig gegebenen Hauptteilen besitzen. Um das einzusehen, bemerken wir zunächst, daß $\{\varphi_1(u,v)\}^2$ bei $u = 0$ einen Pol mit dem Hauptteil $\frac{1}{u^2}$ besitzt. Bei $u = -v$ besitzt diese Funktion einen Pol mit dem Hauptteil $\frac{1}{(u+v)^2}$. Denselben Hauptteil besitzt aber bei $u = 0$ auch die Funktion $\wp(u)$. *Also besitzt die Funktion $\varphi_2(u,v) = \varphi_1^2 - \wp(u)$ einen einzigen Pol zweiter Ordnung bei*

$u = -v$. *Derselbe hat den Hauptteil* $\frac{1}{(u+v)^2}$. Ebenso kann man eine Funktion $\varphi_3(u, v)$ konstruieren, deren einziger Pol bei $u = -v$ liegt und den Hauptteil $\frac{1}{(u+v)^3}$ besitzt. Zu dem Zweck bildet man erst

$$\{\varphi_1(u, v)\}^3.$$

Diese Funktion hat bei $u = -v$ einen Hauptteil von der Form

$$\left(\frac{1}{u+v}\right)^3 + a_1\left(\frac{1}{u+v}\right)^2 + a_2\left(\frac{1}{u+v}\right).$$

Bildet man daher
$$\varphi_1^3 - a_1\varphi_2 - a_2\varphi_1,$$

so hat diese Funktion bei $u = -v$ den gewünschten Hauptteil. Aber sie hat außerdem noch bei $u = 0$ einen Pol mit einem Hauptteil von der Form $\frac{1}{u^3} + b_1\frac{1}{u^2}$. (Das Residuum muß Null sein, weil das Residuum am anderen Pol schon Null ist und die Summe der Residuen nach S. 263 verschwindet.) Zieht man also noch $b_1\wp(u) - \wp'(u)$ ab, so erhält man die gewünschte Funktion $\varphi_3(u, v)$. Ebenso konstruiert man aus

$$\{\varphi_1(u, v)\}^n$$

eine Funktion $\varphi_n(u, v)$, die nur bei $u = -v$ einen Pol vom Hauptteil $\frac{1}{(u+v)^n}$ hat. Bei Null hat man dazu geeignete Multipla der höheren Ableitungen von $\wp(u)$ in Abzug zu bringen. Die n-te Ableitung hat ja, wie eine leichte Rechnung zeigt, den Hauptteil

$$(-1)^n(n+1)!\frac{1}{u^{n+2}}$$

Für $v = 0$ versagt unsere Erklärung der Funktionen $\varphi_n(u, v)$. Denn dann ist ja $\wp(v)$ nicht endlich. Das schadet aber nicht. Denn von $n = 2$ an stehen uns ja schon, wie oben bemerkt wurde, in $\wp(u)$ und seinen Ableitungen die gewünschten Funktionen zur Verfügung. Wir setzen daher $\varphi_n(u, 0) = (-1)^n\frac{1}{(n-1)!}\wp^{(n-2)}(u)$ für $n \geqq 2$. Um nun auch noch $\varphi_1(u, 0)$ zu erklären, wollen wir verabreden, $\varphi_1(u, 0) \equiv 0$ zu setzen. Es wird sich herausstellen, daß diese Verabredung zweckmäßig ist.

3. Partialbruchzerlegung der doppelperiodischen Funktionen. Wir können nun eine Funktion konstruieren, die an den Stellen $v_1, v_2, \cdots v_n$ Pole mit den beliebig gegebenen Hauptteilen

$$\frac{A_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}}{(u-v_\varkappa)^{\lambda_\varkappa}} + \frac{A_{\lambda_\varkappa-1}^{(\varkappa)}}{(u-v_\varkappa)^{\lambda_\varkappa-1}} + \cdots + \frac{A_1^{(\varkappa)}}{u-v_\varkappa}$$

besitzt. Eine solche Funktion ist nämlich

$$\sum_1^n \left\{ A_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)} \varphi_{\lambda_\varkappa}(u, -v_\varkappa) + A_{\lambda_\varkappa-1}^{(\varkappa)} \varphi_{\lambda_\varkappa-1}(u, -v_\varkappa) + \cdots + A_1^{(\varkappa)} \varphi_1(u, -v_\varkappa) \right\}.$$

Diese Funktion hat bei $u = 0$ einen Pol mit dem Residuum $-\sum A_1^{(\varkappa)}$. Die Summe ist dabei über alle von $u = 0$ verschiedenen Pole zu erstrecken. Denn nur für diese hat $\varphi_1(u, -v_\varkappa)$ bei $u = 0$ das Residuum -1, während $\varphi_1(u, 0)$ identisch Null ist, also dort das Residuum Null hat.

Falls nun unter den gegebenen Polstellen $u = 0$ nicht vorkommt, so ist dies Residuum Null. Denn nach S. 263 ist die Summe aller Residuen Null. So mußten also die $A_1^{(\varkappa)}$ vorgegeben sein. Kommt aber Null unter den Polstellen vor, so ergänzt ihr Residuum gerade die Summe der übrigen Residuen zu Null, ist also der negativen Summe $-\sum_\varkappa A_1^{(\varkappa)}$ derselben gleich, und wieder zeigt also unser Ausdruck bei $u = 0$ das richtige Verhalten.

Der angeschriebene Ausdruck ist nach S 265 bis auf eine additive Konstante die allgemeinste doppelperiodische Funktion.

Die so gefundene Darstellung ist das Analogon zur Partialbruchzerlegung in der Theorie der rationalen Funktionen. Man nennt sie *Partialbruchzerlegung der elliptischen Funktionen.*

Man bemerke nun noch, daß die Funktion $\varphi_n(u, -v)$ denselben Hauptteil hat wie die Funktion $\varphi_n(u - v, 0)$. Daher ist bis auf einen konstanten Faktor und bis auf eine additive Konstante die Funktion $\varphi_n(u, -v)$ der n-2-ten Ableitung von $\wp(u - v)$ gleich. Daher kann man auch alle doppelperiodischen Funktionen in die Form

$$f(u) = \sum_1^n \left\{ B_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)} \wp^{(\lambda_\varkappa - 2)}(u - v_\varkappa) + \cdots + B_2^{(\varkappa)} \wp(u - v_\varkappa) + A_1^{(\varkappa)} \varphi_1(u, -v_\varkappa) \right\} + C$$

setzen. Dabei sind die $A_1^{(\varkappa)}$ nach wie vor die Residuen an den einzelnen Polen von $f(u)$, weil ja die Residuen von $\wp(u)$ und von seinen Ableitungen Null sind.

4. Die doppelperiodischen Funktionen als rationale Funktionen von $\wp$ und $\wp'$. Ein Wort muß nun noch über die verwendeten Ableitungen $\wp^{(n)}(u)$ angefügt werden. Auch diese können wie die Funktion $\varphi_1(u, v)$ rational durch $\wp$ und $\wp'$ dargestellt werden. Das lehrt die zwischen $\wp$ und $\wp'$ bestehende Gleichung $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$. Differenziert man sie nämlich, so erhält man $2\wp'\wp'' = 12\wp^2\wp' - g_2\wp'$, also ist $\wp''$ rational durch $\wp$ und $\wp'$ darstellbar. Von hier schließt man auf die dritte, dann auf die vierte Ableitung usw. Damit sind aber auch die Funktionen $\varphi_n(u, v)$ rational durch $\wp$ und $\wp'$ dargestellt. Und damit ist bewiesen:

Jede doppelperiodische Funktion kann rational durch $\wp$ und $\wp'$ dargestellt werden.

Man kann diesen Satz auf die Riemannsche Fläche ubertragen. Jede auf der Fläche eindeutige Funktion, welche überall den Charakter einer rationalen Funktion besitzt, wird eine doppelperiodische Funktion von u. Daher kann man nun den folgenden Satz aussprechen:

Jede eindeutige Funktion der Fläche, welche überall vom Charakter einer rationalen Funktion ist, kann rational durch z und w dargestellt werden.

Dieser Satz entspricht dem Satz, den wir S. 241 fur zweiblattrige Flächen mit *zwei* Verzweigungspunkten aussprachen. Nur konnte damals der Zusatz eindeutig wegbleiben, weil die Fläche umkehrbar eindeutig auf die volle schlichte Ebene abgebildet werden konnte, wo eine jede Funktion von durchweg rationalem Charakter nach dem Monodromiesatz von selbst eindeutig ist. Der gilt aber hier nicht, wie schon die Existenz der Integrale erster Gattung lehrt.

Als Anwendung unseres Satzes wollen wir nun im nachsten Paragraphen die Additionstheoreme der elliptischen Funktionen behandeln.

§ 6. Das Additionstheorem der elliptischen Funktionen.

1. Begriffsbestimmung. Unter einem *Additionstheorem* versteht man die Darstellung der Funktion $f(u+v)$ durch $f(u)$ und $f(v)$. Ein *algebraisches Additionstheorem* besteht fur eine Funktion $f(z)$, wenn zwischen den Ausdrucken $f(u+v)$, $f(u)$ und $f(v)$ eine algebraische Gleichung mit von u und v unabhangigen Koeffizienten besteht. Bekanntermaßen besitzt die Funktion e^z ein solches Additionstheorem. Denn es ist ja $e^{u+v} = e^u \cdot e^v$. Daraus ergeben sich die bekannten Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen, wie uberhaupt aller rationalen Funktionen von e^z mit konstantem Koeffizienten. Denn wenn $f(z) = \Re(e^z)$ eine rationale Funktion von e^z mit konstantem Koeffizienten ist, so ergibt die Elimination von e^u und e^v zwischen den Gleichungen

$$f_1 = \Re(e^u \cdot e^v), \quad f_2 = \Re(e^u), \quad f_3 = \Re(e^v)$$

eine algebraische Gleichung mit konstanten Koeffizienten zwischen $f(u+v) \equiv f_1$, $f(u) \equiv f_2$ und $f(v) \equiv f_3$.

Dieselbe Uberlegung zeigt, daß auch alle rationalen Funktionen algebraische Additionstheoreme besitzen. Um sie zu gewinnen, hat man nur zwischen $f_1 = \Re(u+v)$, $f_2 = \Re(u)$ und $f_3 = \Re(v)$ die Variablen u und v zu eliminieren.

2. Das Additionstheorem der elliptischen Funktionen. Solche Additionstheoreme bestehen nun auch fur die elliptischen Funktionen. Um das einzusehen, hat man nur ihr Bestehen fur $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ nachzuweisen. Denn

ie übrigen drücken sich rational durch diese beiden aus, und zwischen $\wp'$ ınd $\wp$ besteht die algebraische Gleichung $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$. Ist also das ɩdditionstheorem für $\wp'$ und $\wp$ bewiesen, so hat man nur $\wp(u)$, $\wp(v)$ und $\wp'(u)$, ›$'(v)$ zwischen den fünf Gleichungen

$$(u+v) = \Re_1(\wp(u), \wp(v), \wp'(u), \wp'(v)),\ f(u) = \Re_2(\wp(u), \wp'(u)),\ f(v) = \Re_2(\wp(v), \wp'(v))$$

$$\wp'^2(u) = 4(\wp(u))^3 - g_2\wp(u) - g_3$$

$$\wp'^2(v) = 4(\wp(v))^3 - g_2\wp(v) - g_3$$

zu eliminieren, um das Additionstheorem für f zu gewinnen. Weierstraß hat ıberdies gezeigt, daß die hier aufgezählten die einzigen eindeutigen Funktionen einer Variablen sind, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen. Doch werden wir uns damit begnügen, auch für die elliptischen Funktionen die Additionstheoreme zu beweisen.

Sie können fast unmittelbar den Betrachtungen des vorigen Paragraphen entnommen werden.

Wir haben dort die Funktion $\varphi_1(u, v)$ betrachtet. Wir erkannten in $\varphi_1^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right)^2$ eine doppelperiodische Funktion, welche bei $u = -v$ einen Pol vom Hauptteil $\frac{1}{(u+v)^2}$ und bei $u = 0$ einen Pol vom Hauptteil $\frac{1}{u^2}$ besitzt. Daher ist die Funktion

$$\varphi_1^2 - \wp(u+v) - \wp(u)$$

polfrei und daher von u unabhängig. Wir wollen sie mit $C(v)$ bezeichnen. Das folgt daraus, daß auch $\wp(u+v)$ bei $u = -v$ einen Pol vom Hauptteil $\frac{1}{(u+v)^2}$ besitzt. Vertauschen wir in der gewonnenen Gleichung u und v, so finden wir:

$$\varphi_1^2 - \wp(u+v) - \wp(v) = C(u).$$

Subtrahieren wir beide voneinander, so erhalten wir

$$C(u) - \wp(u) = C(v) - \wp(v).$$

Diese Differenz ist also vom Werte von u und vom Werte von v unabhängig, sie ist also eine Konstante C. Daher haben wir nun im ganzen

$$\varphi_1^2 = \wp(u+v) + \wp(u) + \wp(v) + C.$$

Nun bleibt diese Konstante noch zu bestimmen. Zu dem Zweck betrachten

wir die Laurententwicklungen der rechten und der linken Seite bei $u = 0$. Wir finden

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} = \frac{1}{2}\frac{-\frac{2}{u^3} - \wp'(v) + \cdots}{\frac{1}{u^2} - \wp(v) + \cdots} = \frac{1}{2}\frac{1}{u}\frac{-2 - \wp'(v)u^3 + \cdots}{1 - \wp(v)u^2 + \cdots}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{u}(-2 - \wp'(v)u^3 + \cdots)(1 + \wp(v)u^2 + \cdots)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{u}(-2 - 2\wp(v)u^2 + \cdots) = -\frac{1}{u} - \wp(v) + \cdots.$$

Also wird

$$\varphi_1^2 = \frac{1}{u^2} + 2\wp(v) + \cdots.$$

Weiter aber ist $\wp(u+v) + \wp(u) + \wp(v) + C = \frac{1}{u^2} + (2\wp(v) + C) + \cdots$. Daher ist $C = 0$. So finden wir das *Additionstheorem der Funktion* $\wp(u)$.

$$\wp(u+v) = -\wp(u) - \wp(v) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right)^2.$$

Durch Differenzieren nach u gewinnt man daraus das *Additionstheorem der Funktion* $\wp'(u)$:

$$\wp'(u+v) = -\wp'(u) + \frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right).$$

Wenn man will, kann man hierin noch in der in § 5 allgemein angegebenen Art $\wp''(u)$ durch $\wp(u)$ rational darstellen. Es wird ja

$$\wp''(u) = 6(\wp(u))^2 - \frac{g_2}{2}.$$

3. Die Funktion $\zeta(u)$. Auch die Funktion $\zeta(u)$ besitzt ein Additionstheorem. Es ist aber nicht algebraisch. Um es zu finden, betrachten wir die Differenz

$$\zeta(u+v) - \zeta(u).$$

Das ist eine doppelperiodische Funktion. Um das einzusehen, brauchen wir nur aufzuweisen, daß die Funktionen $\zeta(u+v)$ und $\zeta(u)$ dieselben Perioden haben, daß also der Zuwachs, den $\zeta(u+v)$ bei Periodenvermehrung von u erfährt, von v unabhängig ist. Sei nämlich z. B.

$$\zeta(u + v + 2\omega_1) = \zeta(u+v) + 2\pi_1,$$

so hat man nur $u + v = -\omega_1$ einzutragen, um $2\pi_1 = 2\zeta(\omega_1) = 2\eta_1$ zu finden.[1]) Diese doppelperiodische Funktion $\zeta(u+v) - \zeta(u)$ besitzt bei $u = -v$ einen

1) Es folgt auch einfach daraus, daß ja die Gleichung $\zeta(z + 2\omega_1) = \zeta(z) + 2\eta_1$ für *alle* z, also namentlich für $z = u$ und für $z = u + v$ gilt

einfachen Pol von Residuum $+1$ und bei $u = 0$ einen einfachen Pol vom Residuum -1. Daher ist sie bis auf eine additive Konstante C unserer Funktion φ_1 gleich. Um diese Konstante zu bestimmen, beachten wir die Entwicklungen bei $u = 0$. Dort wird

$$\zeta(u+v) - \zeta(u) = -\frac{1}{u} + \zeta(v) + \cdots.$$

Vergleicht man dies mit der oben gegebenen Entwicklung von φ_1, so findet man, daß $C = \zeta(v)$ sein muß. So hat man

$$\zeta(u+v) = \zeta(u) + \zeta(v) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}.$$

4. Nochmals die doppelperiodischen Funktionen. Diese Formel erlaubt auch eine noch andere Formulierung des Additionstheorems der Funktion $\wp(u)$. Durch Differenzieren nach u findet man nämlich

$$\wp(u+v) = \wp(u) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}.$$

Weiter erlaubt es das Additionstheorem der Zetafunktion, in der Darstellung der doppelperiodischen Funktionen durch $\wp(u)$ und seine Ableitungen für $\varphi_1(u, v)$ die Zetafunktion einzuführen. So findet man dann

$$f(u) = \sum_1^n{}_{\nu} \left(B_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)} \wp^{(\lambda_\nu - 2)}(u - v_\nu) + \cdots + B_2^{(\nu)} \wp(u - v_\nu) + A_1^{(\varkappa)} \zeta(u - v_\varkappa)\right)$$
$$- \sum_1^n{}_{\varkappa} A_1^{(\nu)} \zeta(u) + C.$$

§ 7. Die elliptischen Integrale.

Unter einem elliptischen Integral versteht man das Integral über eine rationale Funktion von z und einer Quadratwurzel aus einem Polynom dritten oder vierten Grades. Mit anderen Worten ist also ein elliptisches Integral ein Integral über eine rationale Funktion unserer zweiblättrigen Riemannschen Fläche. Da wir nun in § 5 einen Überblick über alle rationalen Funktionen der Fläche gewonnen haben, sind wir nun in der Lage, die möglichen elliptischen Integrale zu übersehen. Wir knüpfen dazu an die zweite Form der dort gegebenen Partialbruchzerlegung an, studieren also, wie wir immer taten, die Funktionen der Fläche in der u-Ebene. So haben wir den Vorteil, daß wir nur eindeutige Funktionen und ihre Integrale zu betrachten haben. Denn es wird ja

$$\int R(z, w)\, dz = \int R(\wp(u), \wp'(u)) \cdot \wp'(u) \cdot du.$$

Die Integrale werden also in u wieder eindeutig bis auf etwa vorhandene logarithmische Glieder. Bei Periodenvermehrung des Argumentes oder bei Um-

laufen um die logarithmischen Singularitäten erfahren die Integrale nur Vermehrungen um Konstanten.

Die S. 278 dargestellte Funktion $f(u)$ kann man ohne weiteres integrieren. Man findet

$$\int f(u)\,du = \sum_1^u \Big\{ B_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)} \wp^{(\lambda_\varkappa - 1)}(u - v_\varkappa) + \cdots$$
$$+ B_3^{(\varkappa)} \wp(u - v_\varkappa) - B_2^{(\varkappa)} \zeta(u - v_\varkappa) \Big\} + Cu$$
$$+ A_1^{(\varkappa)} \frac{1}{2} \int \frac{\wp'(u) + \wp'(v_\varkappa)}{\wp(u) - \wp(v_\varkappa)}\,du \qquad + D.$$

Betrachten wir nun die hier gefundenen Einzelfunktionen auf der Fläche, so erkennen wir natürlich in $\wp(u - v_\varkappa)$ und seinen Ableitungen rationale Funktionen; in $\zeta(u - v_\varkappa)$ ist uns auf Grund der Formel S. 282 bereits das Integral zweiter Gattung $\zeta(u) - \zeta(v_\nu) + \frac{1}{2}\frac{\wp'(u) + \wp'(v_\varkappa)}{\wp(u) - \wp(v_\nu)} = -\int^z \frac{\mathfrak{z}\,d\mathfrak{z}}{w} + \frac{1}{2}\frac{w - w_\varkappa}{z - z_\nu} - \zeta(v_\varkappa)$ bekannt. Die Funktion $\frac{1}{2}\int \frac{\wp'(u) + \wp'(v_\varkappa)}{\wp(u) - \wp(v_\varkappa)}\,du$ nennt man Normalintegral dritter Gattung. Die Darstellung in z und w liefert

$$\frac{1}{2}\int^z \frac{w - w_\nu}{\mathfrak{z} - z_\varkappa}\,\frac{1}{w}\,d\mathfrak{z}.$$

Fassen wir das gefundene Ergebnis zusammen, so haben wir also gesehen, daß man ein jedes elliptische Integral als Summe einer rationalen Funktion, eines Vielfachen des Normalintegrales erster Gattung $\int \frac{dz}{w}$, des Normalintegrales zweiter Gattung $\left(\int \frac{z\,dz}{w}\right)$, und von Normalintegralen dritter Gattung $\left(\frac{1}{2}\int \frac{w - w_0}{z - z_0}\frac{dz}{w}\right)$ darstellen kann. Die rationale Funktion setzt sich aus $\wp(u - v_\nu)$ und seinen Ableitungen und aus dem beim Übergang von $\zeta(u - v_\varkappa)$ zu $\zeta(u)$ abgespaltenen $-\zeta(v_\nu) + \frac{1}{2}\frac{w - w_\varkappa}{z - z_\varkappa}$ zusammen.

§ 8. Die σ-Funktion.

1. Definition. Im Integral der ζ-Funktion haben wir eine Funktion, die bei Umlaufung ihrer logarithmischen Singularitäten um $2\pi i$ zunimmt. Bildet man dann $e^{\int \zeta(u)\,du}$, so wird dies wieder eine eindeutige Funktion. Das ist die σ-Funktion. Für sie geben wir also folgende Definition, welche auch die noch bleibende Integrationskonstante festlegt:

$$\frac{d \log \sigma(u)}{du} = \zeta(u), \quad \sigma'(0) = 1.$$

Man findet so aus der Darstellung

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum_{\omega}{}' \left(\frac{1}{u - 2\omega} + \frac{1}{2\omega} + \frac{u}{4\omega^2}\right)$$

durch Integrieren

$$\log \sigma(u) = \log u + \int_0^u \sum{}' \cdot du_1 = \log u + \sum_{\omega}{}' \left\{\log\left(1 - \frac{u}{2\omega}\right) + \frac{u^2}{8\omega^2}\right\}.$$

Denn die Integration von 0 bis u darf gliedweise ausgeführt werden und führt wieder auf eine gleichmäßig konvergente Reihe.

Geht man nun zur Exponentialfunktion über, so erhält man

$$\sigma(u) = u \prod{}' \left\{\left(1 - \frac{u}{2\omega}\right) e^{\frac{u}{2\omega} + \frac{1}{8}\frac{u^2}{\omega^2}}\right\}.$$

Nun erkennt man, daß tatsächlich $\sigma'(0) = \lim\limits_{u \to 0} \frac{\sigma(u)}{u} = 1$ ist. Die σ-Funktion ist somit eine ganze Funktion. Sie hat im Periodenparallelogramm einen einzigen Nullpunkt bei $u = 0$ und verschwindet an allen mit ihm äquivalenten Punkten, also an den Punkten $u = 2\omega$, wo 2ω eine beliebige Periode bedeutet.

Ihr Verhalten bei Periodenvermehrung des Argumentes u ergibt sich aus ihrer Definition: Da nämlich $\frac{d \log \sigma(u)}{du} = \zeta(u)$ ist, so hat man z. B.

$$\frac{d \log \sigma(u + 2\omega_1)}{du} = \frac{d \log \sigma(u)}{du} + 2\eta_1.$$

Das bedeutet aber $\frac{d}{du} \log \frac{\sigma(u + 2\omega_1)}{\sigma(u)} = 2\eta_1$. Daher wird $\sigma(u + 2\omega_1) = \sigma(u) e^{2\eta_1 u + A}$. Hier ist A eine noch zu bestimmende Konstante.

Um sie zu ermitteln, beachten wir zunächst, daß $\sigma(u)$ eine *ungerade Funktion* ist. Denn wenn man wieder die beiden von den Perioden $\pm 2\omega$ herrührenden Faktoren zusammennimmt, so vertauschen sie bei einem Vorzeichenwechsel von u nur ihre Plätze, während der Faktor u selbst einen Vorzeichenwechsel der ganzen Funktion $\sigma(u)$ bedingt. Trägt man dann in die Gleichung $\sigma(u + 2\omega_1) = \sigma(u) e^{2\eta_1 u + A}$ für u den Wert $-\omega_1$ ein, so erhält man: $e^A = -e^{2\eta_1 \omega_1}$. Also wird $\sigma(u + 2\omega_1) = -\sigma(u) e^{2\eta_1 (u + \omega_1)}$. Ebenso findet man $\sigma(u + 2\omega_2) = -\sigma(u) e^{2\eta_2 (u + \omega_2)}$.

2. Produktdarstellung der doppelperiodischen Funktionen. Wir wollen in diesem kurzen Abriß der Theorie der elliptischen Funktionen nicht mehr näher auf die Theorie der σ-Funktion eingehen, sondern nur noch kurz zeigen, wie man mit ihrer Hilfe eine jede durch die Lage ihrer Nullpunkte und Pole fest-

gelegte doppelperiodische Funktion darstellen kann. Seien nämlich die Nullstellen bei $a_1, a_2, \cdots a_n$, die Pole bei $b_1, b_2, \cdots b_n$ gelegen und dabei eine jede Stelle so oft aufgeschrieben, als es der Vielfachheit des Poles oder der Nullstelle entspricht, dann gilt die Gleichung $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + 2\omega$, wo 2ω eine passende Periode bedeutet. Da es aber vollkommen ausreicht, unter jeder Schar von Polen z. B., die sich um Perioden unterscheiden, einen auszuwählen[1]), so dürfen wir annehmen, daß $\sum a_\varkappa = \sum b_\varkappa$ ist. Bilden wir dann den Ausdruck

$$f(u) = c\,\frac{\sigma(u-a_1)\cdot\sigma(u-a_2)\cdot\cdots\cdot\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-b_1)\cdot\sigma(u-b_2)\cdot\cdots\cdot\sigma(u-b_n)},$$

so ist dies die gewünschte doppelperiodische Funktion. Denn bei Vermehrung von u um $2\omega_1$ erhält man z. B.: $\sigma(u - a_\varkappa + 2\omega_1) = -\sigma(u - a_\varkappa)e^{2\eta_1(u-a_\varkappa+\omega_1)}$. Also wird $f(u + 2\omega_1) = f(u)e^{2\eta_1(b_1+b_2+\quad+b_n-a_1-a_2-\quad-a_n)}$. Dieser Faktor ist aber Eins.

Diese Darstellung entspricht dem allgemeinen S. 154 angegebenen Satz, wonach man jede Funktion von rationalem Charakter als Quotient zweier ganzen Funktionen darstellen kann. Sie ist das Analogon zur Zerlegung der rationalen Faktoren in lineare Faktoren.

Weiter beantwortet diese Darstellung eine S. 265 gestellte Frage. Die Herleitung zeigt nämlich, daß die Nullstellen und die Pole außer den damals angegebenen und den eben benutzten Bedingungen keinen weiteren Einschränkungen mehr unterliegen.

Zwölfter Abschnitt.

Einfachperiodische Funktionen.

§ 1. Definition der zu untersuchenden Funktionen.

Da durch die Ähnlichkeits-Transformation $u_1 = \frac{u}{p}$ der Periodenstreifen der Breite p in einen Periodenstreifen der Breite 1 übergeht und da durch diese Abbildung aus der Funktionalgleichung

$$f(u + p) = f(u)$$

die Funktionalgleichung $\qquad F(u_1 + 1) = F(u_1)$

wird, falls man $\qquad f(pu_1) = F(u_1)$

setzt, so genügt es, wenn wir weiter Funktionen betrachten, deren Perioden die gewöhnlichen ganzen Zahlen sind.

1) Wenn nämlich eine doppelperiodische Funktion an einer dieser Stellen verschwindet, so verschwindet sie auch an allen anderen

Die Funktion $w = e^{2i\pi u}$ bildet den Periodenstreifen alsdann auf die schlichte w-Ebene ab. Daher geht bei der Abbildung jede eindeutige periodische Funktion in eine eindeutige Funktion von w uber und umgekehrt entspricht jeder eindeutigen Funktion der w-Ebene eine eindeutige periodische Funktion von u. Man kann daher nicht erwarten, daß nach Analogie mit den doppelperiodischen Funktionen eine einfachperiodische Funktion einen jeden Wert gleichoft, und zwar endlichoft annehme, wenn sie von rationalem Charakter ist. Die Funktion $e^{2i\pi u} = e^{w}$ z. B. ist ja einfachperiodisch und nimmt jeden Wert außer Null und Unendlich unendlichoft an. Das wird durch den unter Umstanden bei $w = 0$ oder ∞ vorhandenen wesentlich singulären Punkt ermöglicht. Wollen wir also hier eine analoge Theorie wie bei den doppelperiodischen gewinnen, so mussen wir diese Moglichkeit ausschließen. Die aus der periodischen Funktion $f(u)$ entstehende Funktion $\varphi(w) = f\left(\frac{\log w}{2i\pi}\right)$ muß dann in der Umgebung des Punktes $w = 0$ und des Punktes $w = \infty$ entweder selbst beschränkt sein, oder es muß doch ihr Reziprokes diese Eigenschaft besitzen. Anderenfalls liegt namlich an diesen Stellen eine wesentliche Singularitat. Die Funktion kommt dann jedem Wert in jeder Umgebung dieser Stelle beliebig nahe, wird also nach S. 152 sicher einzelne Werte unendlichoft annehmen. Die gestellte Forderung hat nach S. 154 zur Folge, daß unsere Funktion eine rationale Funktion von w wird. In der u-Ebene bedeutet unsere Forderung, daß fur Imaginarteile von genugend großem absoluten Betrag entweder unsere Funktion $f(u)$ selbst oder ihr Reziprokes $\frac{1}{f(u)}$ im *Periodenstreifen* beschränkt ist, daß also die Funktion $f(u)$ bei Annaherung an die Streifenenden einen endlichen oder unendlichen Grenzwert besitzt. Bei der Abbildung durch die Exponentialfunktion $e^{2i\pi u}$ werden ja aus den Parallelen zur reellen Achse die Kreise mit dem Koordinatenanfang als Mittelpunkt. Aus den oberhalb oder unterhalb einer solchen Geraden gelegenen Streifenenden werden also die Umgebungen von Null und Unendlich. In diesen Umgebungen ist dann $\varphi(w)$ oder $\frac{1}{\varphi(w)}$ beschrankt und besitzt daher nach S. 150 bei Annaherung an 0 oder ∞ einen Grenzwert. Daher besitzt $f(u)$ in den Streifenenden einen endlichen oder unendlichen Grenzwert. Wir merken das Ergebnis noch besonders an:

Wenn eine eindeutige periodische Funktion bei Annaherung an die Streifenenden entweder selbst beschrankt ist, oder dies doch für ihre reziproke zutrifft, so besitzt sie bei Annaherung an die Streifenenden bestimmte endliche oder unendliche Grenzwerte und kann als rationale Funktion von $w = e^{2i\pi u}$ *dargestellt werden. Sie nimmt also im Streifen einen jeden Wert gleichoft an. Die genannten Grenzwerte sind dabei ihrer durch die rationale Funktion bestimmten Vielfachheit nach zu zahlen*

§ 2. Analytische Darstellung der periodischen Funktionen.

1. Der grundlegende Konvergenzsatz. Das Prinzip, nach dem die Bildung analytischer Ausdrucke geschieht, welche einfachperiodische Funktionen darstellen, ist das gleiche wie das S. 265 fur die doppelperiodischen Funktionen auseinandergesetzte. Hier wie dort benotigten wir zunachst eine Konvergenzbetrachtung. Sie stutzt sich hier auf die bekannte Tatsache, daß die Reihe $\sum \frac{1}{n^{\varkappa}}$ für $\varkappa \geqq 2$ konvergiert. Daraus kann man schließen, daß die Reihe $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(u-n)^{\varkappa}}$ absolut und gleichmaßig in jedem endlichen Bereich konvergiert, wenn man zuvor die endlichvielen Glieder, welche in dem Bereiche unendlich werden, aus der Reihe entfernt hat. Wir beweisen gleich die absolute und gleichmaßige Konvergenz fur den ganzen Streifen der Fig. 77. Er hat die Breite $2m$. m bedeutet eine ganze Zahl. Lasse ich die Glieder weg, die in diesem Streifen Pole besitzen, so bleibt die Reihe $\sum_{|n| \geqq m+1} \frac{1}{(u-n)^{\varkappa}}$ ubrig. Hier ist nun aber

$$\left|\frac{1}{u-n}\right|^{\varkappa} = \left|\frac{1}{(u_1-n)^2+u_2^2}\right|^{\frac{\varkappa}{2}} \leqq \frac{1}{|u_1-n|^{\varkappa}} \quad (u = u_1 + i u_2).$$

-m 0 +m

Fig 77

Ferner ist

$$\left|\frac{u_1-n}{n}\right| = \left|1-\frac{u_1}{n}\right| \geqq 1 - \left|\frac{u_1}{n}\right| > 1 - \frac{m}{m+1} = \frac{1}{m+1}.$$

Also wird
$$\left|\frac{u_1-n}{n}\right|^{\varkappa} > \frac{1}{(m+1)^{\varkappa}} = \frac{1}{M}.$$

Daraus folgt aber
$$\frac{1}{|u-n|^{\varkappa}} < \frac{1}{|u_1-n|^{\varkappa}} < \frac{M}{n^{\varkappa}}$$

Und hieraus entnimmt man die absloute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe für $\varkappa \geqq 2$. Nimmt man nun die weggelassenen endlichvielen Glieder wieder hinzu und wählt fur $\varkappa$ eine ganze Zahl, so stellt die Reihe

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(u-n)^{\varkappa}}$$

eine periodische Funktion der Periode Eins dar, welche bei $u = 0$ und den äquivalenten Stellen Pole $\varkappa$-ter Ordnung besitzt.

. Die einfachsten periodischen Funktionen. Die einfachste dieser Funk-
ien, das Analgon zur $\wp'$-Funktion, ist die Funktion

$$f(u) = -\sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{u-n}\right)^2.$$

r gehen gleich zu ihrem Integral uber. Ich setze

$$\varphi(u) = \frac{1}{u} + \int_0^u \left\{ f(u_1) + \frac{1}{u_1^2} \right\} du_1 = \frac{1}{u} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{u-n} + \frac{1}{n}\right).$$

für kann man auch schreiben

$$\varphi(u) = \frac{1}{u} + \sum_1^{\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2}.$$

Man kann zwar den Darlegungen von S. 182ff. schon entnehmen, daß diese
nktion weiter nichts ist als $\pi \operatorname{cotg} \pi u$. Doch ist es sehr instruktiv, dies
gebnis hier auf einem ganz anderen Weg wieder zu gewinnen. Wir wollen
o die Funktion $\varphi(u)$ etwas naher untersuchen. Zunachst wollen wir uns
von uberzeugen, daß sie periodisch ist. Dazu schreiben wir sie in der Form

$$u) = \frac{1}{u} + \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{u+n} - \frac{1}{n}\right) + \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{u-n} + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{u} + \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{u+n+1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{u+1} - 1\right) + \sum_2^{\infty} \left(\frac{1}{u+1-n} - \frac{1}{1-n}\right)$$

inn wird

$$p(u+1) = \frac{1}{u+1} + \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{u+1+n} - \frac{1}{n}\right) + \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{u+1-n} + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{u+1} + \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{u+1+n} - \frac{1}{n}\right) + \sum_2^{\infty} \left(\frac{1}{u+1-n} + \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{u} + 1\right).$$

der Differenz $\varphi(u+1) - \varphi(u)$ nehmen wir nun immer die Glieder zusam-
en, welche dieselbe Polstelle besitzen. Dann wird

$$\varphi(u) - \varphi(u+1) = -1 + \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - 1 - \sum_2^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{1-n}\right)$$

$$= -2 + 2\sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Das ist aber offenbar Null. Denn die k-te Teilsumme von $\sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ ist

$$1 - \frac{1}{k+1}.$$

Weiter haben wir uns zu überzeugen, daß die allgemeinen Sätze des vorigen Paragraphen auf diese Funktion abwendbar sind. Wir müssen also die Funktion $\varphi(u)$ in den Streifenenden abschätzen. Das geht hier sehr leicht. Denn man hat ja im Streifen $0 \leqq u_1 \leqq 1$: $\left|\frac{2u}{u^2 - n^2}\right| \leqq \frac{2|u|}{(u_1 - n)^2 + u_2^2} < \frac{2|u_2|}{(n-1)^2 + u_2^2}$.

Also ist $|\varphi(u)| < \frac{1}{|u_2|} + 2\sum_0^\infty \frac{|u_2|}{n^2 + u_2^2} < \frac{2}{|u_2|} + 2\int_0^\infty \frac{|u_2|}{x^2 + u_2^2}\, dx = \frac{2}{|u_2|} + \pi$.

Also ist die Funktion $\varphi(u)$ tatsächlich in den Streifenenden beschränkt und besitzt also dort *endliche* Grenzwerte. Daher nimmt sie als rationale Funktion von $e^{2i\pi u}$ jeden Wert im Streifen gleichoft an. Da sie aber ersichtlich daselbst nur einen einfachen Pol bei $u = 0$ besitzt, so nimmt sie jeden Wert genau einmal an. Daher vermittelt sie eine schlichte Abbildung des Streifens auf eine volle Ebene. Sie ist also eine lineare Funktion von $w = e^{2i\pi u}$. In ihren Polen stimmt sie mit der Funktion $\operatorname{cotg} \pi u$ überein, die ja als lineare Funktion $i\,\frac{e^{2i\pi u}+1}{e^{2i\pi u}-1}$ von $w = e^{2i\pi u}$ im Streifen jeden Wert genau einmal annimmt. Die Pole der Funktion $\operatorname{cotg} \pi u$ besitzen aber das Residuum $\frac{1}{\pi}$. Denn es ist ja $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\cos \pi u}{\sin \pi u} \cdot u = \frac{1}{\pi}$. Unsere Funktion stimmt daher mit $\pi \operatorname{cotg} \pi u$ in den Hauptteilen der Pole überein. Daher besitzt die Differenz $\pi \operatorname{cotg} \pi u - \varphi(u)$ gar keine Pole und ist daher als rationale Funktion von $w = e^{2i\pi u}$ eine Konstante. Um den Wert dieser Konstanten zu bestimmen, beachten wir, daß sowohl $\pi \operatorname{cotg} \pi u$ wie $\varphi(u)$ ungerade Funktionen sind. Ihre Laurententwicklungen in der Umgebung von $u = 0$ enthalten daher nur Glieder ungerader Ordnung. Namentlich also sind die Absolutglieder der Entwicklungen Null. Die Differenz $\pi \operatorname{cotg} \pi u - \varphi(u)$ wird also in der Umgebung von $u = 0$ durch eine mit den linearen Gliedern beginnende Potenzreihe von u dargestellt. Sie verschwindet daher bei $u = 0$. Daher ist die Differenz überall Null. Denn wir wissen schon, daß sie von u unabhängig ist. Daher haben wir nun die Partialbruchdarstellung des Cotangens

$$\pi \operatorname{cotg} \pi u = \frac{1}{u} + \sum_1^\infty \frac{2u}{u^2 - n^2} = \frac{1}{u} + \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \left\{\frac{1}{u-n} + \frac{1}{n}\right\}.$$

Durch gliedweises Differenzieren entnimmt man hieraus, daß

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi u} = \frac{1}{u^2} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(u-n)^2}.$$

Beachtet man aber, daß ferner $\pi \operatorname{cotg} \pi u = \frac{d}{du} \log \sin \pi u$, so erhält man durch gliedweises Integrieren (in der Σ' von 0 bis u)

$$\log \sin \pi u = \log u + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \left\{ \log \left(1 - \frac{u}{n}\right) + \frac{u}{n} \right\} + C.$$

Dabei ist C eine noch zu bestimmende Integrationskonstante. Aus dem Ergebnis gewinnt man weiter die Faktorzerlegung des Sinus, nämlich

$$\sin \pi u = u \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{u}{n}\right) e^{\frac{u}{n}} e^{C}.$$

Um nun die Konstante e^c zu bestimmen, müssen wir nur beachten, daß

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin \pi u}{u} = \pi$$

sein muß. Daher wird nun

$$\sin \pi u = \pi u \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{u}{n}\right) e^{\frac{u}{n}} = \pi u \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right).$$

Aufgabe. Man beweise direkt (ähnlich wie im Text bei $\operatorname{cotg} \pi u$), daß

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi u} = \sum \frac{1}{(u - n)^2}$$

ist, und erschließe daraus die Partialbruchzerlegung von

$$\pi \operatorname{cotg} \pi u.$$

Dreizehnter Abschnitt.

Allgemeine Sätze über die Darstellung der analytischen Funktionen durch Reihen und Produkte.

§ 1. Die Partialbruchdarstellung der meromorphen Funktionen.

1. Der Satz. Sowohl bei den doppelperiodischen, wie bei den einfachperiodischen Funktionen sind uns Darstellungen gewisser meromorpher[1]) Funktionen durch Partialbruchreihen begegnet. Es ist nun an der Zeit, diese Beispiele einer allgemeinen Theorie einzuordnen.

1) Eine analytische Funktion nennt man meromorph, wenn sie an allen endlichen Stellen des Argumentes rationalen Charakter besitzt.

Es möge eine meromorphe Funktion $f(z)$ vorgelegt sein. Ihre Pole sollen bei den Stellen $a_\varkappa (\varkappa = 0, 1, \ldots)$ gelegen sein. An der Stelle $a_\varkappa$ sei der Hauptteil $f_\varkappa(z)$ durch die Darstellung

$$f_\varkappa(z) = \frac{A^{(\varkappa)}_{\lambda_\varkappa}}{(z-a_\varkappa)^{\lambda_\varkappa}} + \cdots + \frac{A^{(\nu)}_1}{z-a_\nu}$$

gegeben. Wir dürfen annehmen, daß die $a_\varkappa$ nach der Größe der absoluten Beträge geordnet sind, daß also $0 \leqq |a_1| \leqq |a_2| \leqq \cdots$. Dann ist $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} |a_\varkappa| = \infty$. Wir wollen dann zeigen, daß man eine ganze Funktion $g(z)$ und gewisse ganze rationale Funktionen $g_\nu(z)$ so bestimmen kann, daß

$$f(z) = g(z) + \sum_1^\infty{}' (f_\varkappa(z) - g_\varkappa(z)).$$

Dabei wird die Reihe in jedem endlichen Bereich gleichmäßig konvergieren, wenn man sie erst durch Weglassen der endlichvielen Glieder verkürzt, welche in dem Bereich Pole besitzen. Man nennt diesen Satz nach seinem Entdecker den *Weierstraßschen Satz*. Ebensowenig wie bei der Reihe für $\operatorname{cotg} z$ oder für $\wp(z)$ konvergiert also die über die Hauptteile erstreckte Reihe im allgemeinen selbst. Vielmehr kommt die Konvergenz erst durch die konvergenzerzeugenden Zusatzglieder $g_\nu(z)$ zustande. Sie sind uns ja auch schon bei den eben genannten Reihen begegnet.

Unsere Betrachtung wird gleichzeitig noch mehr erkennen lassen. Wir werden zum Beweis gar nicht nötig haben, daß bereits bekannt ist, daß die $f_\varkappa(z)$ die Hauptteile einer meromorphen Funktion sind. Vielmehr können die $f_\nu(z)$ ganz beliebig vorgegeben werden. Auch die a_ν können ganz beliebig gewählt werden, wenn nur $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} a_\nu = \infty$ erfüllt bleibt.[1] Stets kann man dann die $g_\varkappa(z)$ so wählen, daß die Reihe in dem angegebenen Sinne gleichmäßig konvergiert. Damit ist dann zugleich gezeigt, daß die Hauptteile meromorpher Funktionen keinerlei Beschränkungen unterliegen. Der Unterschied zweier meromorpher Funktionen mit den gleichen Hauptteilen ist natürlich eine ganze Funktion. Damit ist schon der auf die Funktion $g(z)$ sich beziehende Teil unserer Behauptung erledigt. Es bleibt uns also nur zu beweisen, daß die Reihe bei passender Wahl der $g_\varkappa(z)$ konvergiert.

2. Beweis. Wir führen eine unendliche Folge von Kreisen K_n: $|z| \leqq \frac{|a_n|}{2}$ mit niemals abnehmenden Radien $\frac{|a_n|}{2}$ ein. Ferner wählen wir irgendwie eine

1) Der analoge Satz für den Fall, daß die $a_\varkappa$ dieser Bedingung nicht genügen, wird uns erst später beschäftigen.

unendliche Folge positiver mit $\frac{1}{\varkappa}$ stets abnehmender Zahlen $\varepsilon_\varkappa (\varkappa = 1, 2 \cdots)$ derart aus, daß ihre Summe $\sum_1^\infty \varepsilon_\varkappa$ konvergiert.

Wenn nun $a_1 = 0$ sein sollte, so soll das Zusatzglied $g_1(z) = 0$ gesetzt werden. Fur alle von Null verschiedenen $a_\varkappa$ aber soll die Bestimmung der Zusatzglieder $g_\varkappa(z)$ nach der folgenden Regel geschehen: Im Kreise $|z| < |a_n|$ ist der Hauptteil $f_n(z)$ regular. Er kann daher durch eine in diesem Kreise konvergente Potenzreihe $\mathfrak{P}_n(z)$ dargestellt werden. Da diese nun in dem kleineren Kreise $K_n: |z| \leqq \frac{|a_n|}{2}$ gleichmäßig konvergiert, so kann eine Teilsumme $g_n(z)$ der Reihe so gewahlt werden, daß $|f_n(z) - g_n(z)| < \varepsilon_n$ bleibt in dem ganzen Kreise K_n. Dies $g_n(z)$ soll als n-tes Zusatzglied ausgewählt werden. Nun nehme ich irgendeinen Kreis $K: |z| \leqq R$ und lasse die Reihenglieder beiseite, deren K_n einen kleineren Radius hat als K. So werden im ganzen nur endlichviele Glieder beiseite gelassen. Die noch übrig bleibende Reihe hat nun die Eigenschaft, daß fur alle ihre Glieder in K die eben angegebene Abschatzung gilt. Denn die diesen Gliedern zugehörigen Kreise K_n umfassen alle den Kreis K. Daher konvergiert die Reihe gleichmäßig in K. Denn die Zahlenreihe $\Sigma \varepsilon_n$ konvergiert und die Abschatzung hangt von der Stelle z nicht ab.

§ 2. Der Mittag-Lefflersche Satz.

Man kann die Betrachtungen des vorigen Paragraphen unschwer auf Funktionen mit beliebiger Polverteilung ausdehnen. Die endlichen oder unendlichen Haufungspunkte der Pole sind dann natürlich keine Pole. Sie konnen Singularitaten von anderem Charakter sein. Es kann sein, daß durch diese Haufungspunkte die Ebene in mehrere Teile zerlegt wird. Stets wird sich ergeben, daß die Reihe in jedem Bereich, der nur endlichviele Polstellen enthält, von den da unendlich werdenden Reihengliedern abgesehen, gleichmäßig konvergiert. Sie wird dann also in den verschiedenen Teilen der Ebene verschiedene analytische Funktionen darstellen, die sich uber die Bereichgrenzen hinaus nicht fortsetzen lassen. Die Durchfuhrung dieses Ansatzes ist außerordentlich einfach. Die konvergenzerzeugenden Glieder werden hier nach folgender Vorschrift gebildet. Zunachst werde angenommen, daß der unendlichferne Punkt weder Pol noch Haufungspunkt von Polen sei. Man ordne dann jedem Pol a_n den nachst gelegenen Haufungspunkt der Pole: c_n zu. Alsdann ist der Hauptteil $f_n(z)$ außerhalb des Kreises $|z - c_n| = |a_n - c_n|$ regulär. Der mit diesem konzentrische Kreis von doppeltem Radius werde mit K_n bezeichnet. Dann kann man im Außeren des Kreises $|z - c_n| = |a_n - c_n|$

$$f_n(z) = \mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{z - c_n}\right)$$

setzen. Daher kann man wieder eine Teilsumme $g_n(z)$ dieser Reihe so wahlen, daß im Äußeren von K_n selbst $|f_n(z) - g_n(z)| < \varepsilon_n$ gilt. Die ε_n mögen dabei wie im § 1 erklart sein. Damit ist das Zusatzglied bestimmt. Die so erklärte Reihe konvergiert nun in jedem *abgeschlossenen* Bereiche B, der nur endlichviele Polstellen enthält und der an keinen Haufungspunkt heranreicht, in dem angegebenen Sinne[1]) gleichmaßig. Denn es gibt nur endlichviele der Kreisperipherien K_n, welche in ein derartiges Gebiet eindringen. Ein solches Gebiet hat nämlich einen endlichen von Null verschiedenen Abstand d von den Häufungspunkten. Es gibt aber nur endlichviele Kreise K_n, deren Radius die Zahl d ubertrifft. Denn schlagt man um alle Häufungspunkte Kreise vom Radius d, so liegen außerhalb aller dieser Kreise nur noch endlichviele Pole. Nur diese konnen aber zu den Kreisen K_n von einem Radius größer oder gleich d Anlaß geben. Nur ein Teil der Kreise K_n dieser endlichvielen Pole kann in das Gebiet B eindringen. Lassen wir die zugehorigen endlichvielen Reihenglieder beiseite, so konvergiert der Rest in B gleichmaßig, weil die Reihenglieder in B dann durchweg kleiner sind als die Zahlen ε_n. Denn das Gebiet B liegt dann außerhalb aller noch ubrigen Kreise K_n.

Nun bleibt nur noch ein Wort zu sagen uber den Fall, wo $z = \infty$ Pol oder Häufungspunkt von Polen ist Dann gehen wir durch stereographische Projektion zu einer Kugeloberflache uber. Der Punkt $z = 0$ moge dabei in den tiefsten, der Punkt $z = \infty$ in den hochsten Kugelpunkt ubergehen. Alle Maßangaben, die bei unseren Darlegungen gemacht wurden, mogen dann auf die Kugel bezogen werden. Wird dann der nachste Haufungspunkt der Punkt ∞, so tritt an Stelle einer Entwicklung $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z - c_n}\right)$ eine Entwicklung $\mathfrak{P}(z)$. Die nahere Durchfuhrung dieser Andeutungen möge als nutzliche Übung dem Leser uberlassen bleiben.

Diese Betrachtungen beweisen einen allgemeinen Satz, den man nach seinem Entdecker den *Mittag-Lefflerschen Satz* nennt. Er lautet: Wenn in der komplexen Ebene Polstellen $a_\varkappa$ und zugehorige Hauptteile $f_\nu(z)$ beliebig vorgegeben sind, so gibt es stets Reihen

$$f(z) = \Sigma \{ f_\varkappa(z) - g_\varkappa(z) \},$$

die in jedem an keinen Häufungspunkt von Polen heranreichenden Bereich nach Weglassung endlichvieler Glieder gleichmaßig konvergieren. Sie stellen also Funktionen dar, die an den vorgeschriebenen Stellen Pole mit gegebenen Hauptteil haben und die, abgesehen von den Häufungspunkten der Pole, sonst überall regulär sind. Die $g_\varkappa(z)$ sind dabei passend gewählte rationale Funktionen.

1) D. h. nach Weglassung von endlich vielen Reihengliedern.

§ 3. Die Produktdarstellung der ganzen transzendenten Funktionen.

1. Die Weierstraßsche Produktdarstellung. Die logarithmische Ableitung $\frac{f'(z)}{f(z)}$ einer ganzen Funktion $f(z)$ ist eine meromorphe Funktion. Ihre Pole liegen an den Nullstellen von $f(z)$. Sie sind alle einfach und haben nach S. 189 ganzzahlige Residuen. Umgekehrt ist jede derartige meromorphe Funktion logarithmische Ableitung einer ganzen Funktion. Man erkennt dies ohne weiteres durch Integration und Übergang zur Exponentialfunktion. Darin liegt, daß die Nullstellen, einer ganzen Funktion und ihre Vielfachheiten beliebig gewählt werden können. Nur die eine Einschränkung besteht, daß im Endlichen kein Häufungspunkt von Nullstellen liegen darf. Sonst wäre nach S. 140 die Funktion identisch Null.

Diese Darlegungen erlauben es, wie bei $\sin z$ und bei $\sigma(z)$ ausgehend von der analytischen Darstellung der meromorphen Funktionen durch Partialbruchreihen, zur Darstellung der ganzen Funktion durch unendliche Produkte überzugehen. Sie sind das Analogon zur bekannten Zerlegung ganzer rationaler Funktionen in Linearfaktoren.

Im vorliegenden Fall ist $f_\varkappa(z) = \frac{m_\varkappa}{z - a_\varkappa}$, und die Zusatzglieder $g_\varkappa(z)$ haben die folgende Gestalt:

$$g_\varkappa(z) = \left(-\frac{1}{a_\varkappa} - \frac{z}{a_\varkappa^2} - \frac{z^2}{a_\varkappa^3} - \cdots - \frac{z^{n_\varkappa - 1}}{a_\varkappa^{n_\varkappa}}\right) m_\varkappa.$$

Die meromorphe Funktion ist[1])

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = g'(z) + \sum_1^\infty{}' \left(\frac{1}{z - a_\varkappa} + \frac{1}{a_\varkappa} + \frac{z}{a_\varkappa^2} + \cdots + \frac{z^{n_\varkappa - 1}}{a_\varkappa^{n_\varkappa}}\right).$$

Dann wird $$f(z) = e^{g(z)} \prod_1^\infty{}' \left\{\left(1 - \frac{z}{a_\varkappa}\right) e^{\frac{z}{a_\varkappa} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_\varkappa}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n_\varkappa}\left(\frac{z}{a_\varkappa}\right)^{n_\varkappa}}\right\}.$$

Das ist die zuerst von *Weierstraß* angegebene Produktdarstellung der ganzen Funktionen. Hier gilt eine ähnliche Bemerkung wie bei den Partialbruchreihen. Das Produkt der Linearfaktoren selbst konvergiert im allgemeinen noch nicht. Die Konvergenz wird erst durch den Zusatz der konvergenzerzeugenden Exponentialfaktoren erzwungen.

2. Die konvergenzerzeugenden Faktoren. Es ist von Interesse, die Beziehungen zwischen den Exponenten $n_\varkappa$ und den Nullstellen $a_\varkappa$ etwas näher zu betrachten. Natürlich besteht in der Wahl der $n_\varkappa$ eine große Willkür. Denn

1) Wir nehmen uns die erlaubte Freiheit, den Term $\frac{1}{z - a_\varkappa}$ gerade $m_\varkappa$ mal zu schreiben.

wir nahmen ja z. B. eine beliebige konvergente Reihe $\Sigma \varepsilon_\varkappa$ und benutzen die $\varepsilon_\varkappa$ als Gradmesser für die zu erstrebende Approximation der Hauptteile durch die Zusatzglieder. Indessen wird man es als möglichst günstig ansehen müssen, wenn man mit möglichst kleinen $n_\varkappa$ durchkommt. Es erhebt sich daher die Frage, wie man in dieser Richtung ein Urteil gewinnen kann.

Bei dieser Untersuchung erweist es sich als zweckmäßig, nicht bis zur Partialbruchreihe zurückzugehen, sondern schon bei dem Logarithmus der ganzen Funktion stehen zu bleiben. Man gewinnt so bessere Abschätzungen. Das unendliche Produkt ist nämlich dann und nur dann konvergent und an den von den a_ν verschiedenen Stellen von Null verschieden, wenn die Reihe der Logarithmen seiner Faktoren in jedem endlichen Gebiet in dem schon mehrfach angegebenen Sinne gleichmäßig konvergiert. D. h. also, diese Reihe muß gleichmäßig konvergieren, wenn man aus ihr die endlichvielen Glieder herausläßt, welche in dem beterffenden Gebiet unendlich werden. Dies ist wieder der Fall, wenn wir wieder unsere Kreise $K_\varkappa$ und unsere Zahlen $\varepsilon_\varkappa$ heranziehen, nun aber die Abschätzungen bei der Reihe der Logarithmen durchführen. Für einen einzelnen Faktor finden wir

$$\varphi_\varkappa(z_\varkappa) = \log\left\{\left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{\frac{z}{a_\varkappa} + \cdots + \frac{1}{n_\nu}\left(\frac{z}{a_\varkappa}\right)^{n_\varkappa}}\right\} = -\frac{1}{n_\nu + 1}\left(\frac{z}{a_\varkappa}\right)^{n_\varkappa + 1} - \frac{1}{n_\varkappa + 2}\left(\frac{z}{a_\varkappa}\right)^{n_\varkappa + 2} \cdots,$$

Diese Entwicklung[1]) konvergiert im Kreise

$$|z| < |a_\nu|.$$

$K_\varkappa$ ist mit diesem konzentrisch und hat den halben Radius $\left|\frac{a_\nu}{2}\right|$. Daher ist für ein in $K_\varkappa$ gelegenes z stets

$$|z| < \frac{|a_\nu|}{2} \quad \text{und} \quad |a_\varkappa| - |z| \geqq \left|\frac{a_\varkappa}{2}\right|.$$

Schätzen wir nun das Reihenglied ab, so erhalten wir

$$|\varphi_\varkappa(z)| \leqq \frac{1}{n_\varkappa + 1}\left|\frac{z}{a_\varkappa}\right|^{n_\varkappa + 1} \frac{1}{1 - \left|\frac{z}{a_\nu}\right|} \leqq \frac{2}{n_\varkappa + 1}\left|\frac{z}{a_\varkappa}\right|^{n_\varkappa + 1}.$$

Setzen wir nun[2])
$$\varepsilon_\varkappa = \frac{2}{n_\varkappa + 1}\left|\frac{z}{a_\nu}\right|^{n_\nu + 1},$$

1) Durch ihre Wahl möge zugleich der zu verwendende Zweig der $\log\left(1 - \frac{z}{a}\right)$ festgelegt sein.

2) Diese $\varepsilon_\varkappa$ sind nun zwar nicht von z unabhängig, aber die $\Sigma \varepsilon_\varkappa$ ist eine Potenzreihe, die also selbst gleichmäßig konvergiert. Das genügt für unsere Zwecke.

so brauchen wir nur zu verlangen, daß

$$\sum \frac{1}{n_\varkappa + 1} \left| \frac{z}{a_\varkappa} \right|^{n_\varkappa + 1}$$

fur *alle* z konvergiert. Sowie man also die $n_\varkappa$ dieser Bedingung entsprechend gewählt hat, hat man eine brauchbare Produktdarstellung der ganzen Funktion gefunden. Wenn also z. B. $\left|\frac{1}{a_\varkappa}\right|$ konvergiert, dann konvergiert auch das Produkt $\prod \left(1 - \frac{z}{a_\varkappa}\right)$ selbst. Hier ist also die Analogie mit den rationalen Funktionen am weitesten getrieben. Im Sinus hatten wir ein Beispiel, wo man alle $n_\varkappa = 1$ wahlen darf. Die Nullstellen hatten bei $\sin \pi z$ die Werte $a_\varkappa = \varkappa$, und tatsächlich konvergiert ja auch $\sum \frac{1}{\varkappa^2}$. Bei der Funktion $\sigma(u)$ war $n_\varkappa = 2$ und $a_\varkappa = 2\omega_\varkappa$. Tatsachlich konvergiert ja $\sum \frac{1}{|2\omega_\varkappa|^3}$. Naturlich kann man in allen diesen Fallen statt dieser moglichst kleinen $n_\varkappa$ auch großere Werte $n_\varkappa$ wählen. Dann ändert sich damit auch der Exponentialfaktor, der noch vor dem Produkt steht.

Besonderes Interesse haben die ganzen Funktionen von *endlicher* Ordnung gefunden. Das sind diejenigen Funktionen, deren Zahlen $n_\varkappa$ beschrankt sind, und in welchen die Funktion $g(z)$ im voranstehenden Exponentialfaktor eine ganze rationale Funktion ist. Im zweiten Bande werden die ganzen Funktionen endlicher Ordnung naher untersucht werden.

§ 4. Einige Anwendungen.

Die Uberlegungen der beiden vorhergehenden Paragraphen lassen viele nützliche Folgerungen zu. Einige derselben sollen hier hervorgehoben werden.

1. *Jede meromorphe Funktion laßt sich als Quotient zweier ganzen Funktionen darstellen.*

Um das einzusehen, hat man nur die Pole $a_1, a_2, \cdots$ der meromorphen Funktion und ihre Vielfachheit festzustellen. Alsdann bildet man nach dem in § 2 angegebenen Verfahren eine ganze Funktion, die an den Stellen $a_1, a_2, \cdots$ Nullstellen der betreffenden Vielfachheit hat. Multipliziert man nun die gegebene meromorphe Funktion mit dieser ganzen Funktion, so entsteht eine polfreie Funktion von rationalem Charakter. Das ist aber wieder eine ganze Funktion. Damit ist der Beweis schon erbracht.

2. **Interpolation.** Wir zeigen weiter, *daß es ganze Funktionen gibt, die an den gegebenen Stellen* $a_1, a_2, \cdots$ mit $a_n \to \infty$ *gegebene Werte* $A_1, A_2, \cdots$ *annehmen.* Das ist offenbar eine Erweiterung der Aufgabe der *Interpolation.* Hier kann es sich aber tatsächlich nur darum handeln, die *Existenz* solcher ganzen Funk-

tionen nachzuweisen. Daß sie eindeutig bestimmt seien, kann man nicht erwarten. Denn man hat ja nur nötig, irgendeine ganze Funktion zuzufügen, welche an den gegebenen Stellen verschwindet, um eine weitere Lösung des Interpolationsproblemes zu erhalten.

Um aber zu sehen, daß es ganze Funktionen gibt, die den angegebenen Bedingungen genügen, verfährt man ähnlich wie bei den ganzen rationalen Funktionen. Man bildet eine ganze Funktion $\varphi(z)$, die an den Stellen $a_\varkappa$ einfache Nullstellen hat. Alsdann bilde man nach § 1 eine meromorphe Funktion $\Phi(z)$, welche an den Stellen $a_\varkappa$ einfache Pole mit dem Residuum $\frac{A_\nu}{\varphi'(a_\nu)}$, also dem Hauptteil $\frac{A_\nu}{\varphi'(a_\nu)} \frac{1}{z-a_\nu}$, besitzt. Das Produkt

$$f(z) = \varphi(z) \cdot \Phi(z)$$

ist dann eine ganze Funktion der gewünschten Art.

3. Existenzbereich. Als letzte Anwendung wollen wir auf den Satz von Mittag-Leffler des § 2 zu sprechen kommen. Man kann mit ihm einen ähnlichen Prozeß vornehmen, wie der war, dem wir in § 3 den Weierstraßschen Satz unterwarfen. Man erhält so eine analytische eindeutige Funktion, welche an beliebig gegebenen Stellen verschwindet. Wenn diese Stellen die Ebene in mehrere Bereiche zerlegen, deren Grenze dann von den Häufungspunkten der Nullstellen gebildet wird, so erhält man in jedem Bereiche eine Funktion, die über seine Grenze hinaus nicht fortgesetzt werden kann, die also, wie man sagt, die Grenze des Bereiches *zur natürlichen Grenze* hat.[1]) Schon S. 220 sahen wir, daß der Kreis als Existenzbereich einer Funktion möglich ist. *Kann aber jeder beliebige Bereich Existenzbereich sein?* Oder müssen da noch Bedingungen erfüllt sein? *Um zu sehen, daß keinerlei weitere Bedingungen nötig sind,* haben wir nur zu zeigen, daß man die Menge der Nullstellen im Bereiche so wählen kann, daß jeder Randpunkt des Bereiches Häufungspunkt derselben ist, und daß keine weiteren Häufungspunkte von Nullstellen existieren. Um das einzusehen, konstruieren wir ein Quadratnetz der Kantenlänge Eins und wählen in jedem der Quadrate, welches (im Inneren oder am Rand) Randpunkte enthält, eine dem Bereich angehörige Stelle beliebig als Stelle $a_\varkappa$ aus. Alsdann wählen wir ein Quadratnetz der Kantenlänge $\frac{1}{10}$ und greifen wieder diejenigen Quadrate heraus, welche Randpunkte enthalten. In jedem wählen wir wieder einen neuen dem Bereiche angehörigen Punkt $a_\varkappa$. Dann nehmen wir ein Quadratnetz der Kantenlänge $\frac{1}{10^2}$ und verfahren ebenso. So geht es in infinitum weiter. So

1) Daß die gefundene Funktion in keinem der Bereiche identisch verschwinden kann, lehrt schon die Art der Herleitung. Dabei war ja gerade die Regularität des Logarithmus der Funktion an den von den $a_\varkappa$ verschiedenen Stellen der Bereiche verwendet.

erhalten wir eine Menge von Punkten $a_\varkappa$ derart, daß alle ihre Häufungspunkte Randpunkte des Bereiches sind, und derart, daß jeder Randpunkt ein Häufungspunkt der Menge der $a_\varkappa$ ist. Denn betrachten wir z. B. unser Quadratnetz der Kantenlänge $\frac{1}{10^n}$, so sind die einzigen Quadrate, die unendlichviele Punkte $a_\varkappa$ enthalten können, diejenigen, welche Randpunkte enthalten. Jeder Randpunkt aber gehört einem Quadrat eines jeden Netzes an. Daher wird in seiner Nähe mit jedem Netz ein neuer Punkt $a_\varkappa$ gewählt, so daß also in der Umgebung eines jeden Randpunktes unendlichviele Punkte $a_\varkappa$ liegen.

So haben wir den Satz: *Jeder beliebige schlichte Bereich kann Existenzbereich darin r e g u l ä r e r Funktionen sein.*

Die direkte Verwendung des Mittag-Lefflerschen Satzes ohne die im § 3 gegebene Umformung würde nur lehren, daß jeder Bereich Rationalitätsbereich sein kann, während wir jetzt sogar wissen, daß jeder Bereich als Regularitätsbereich auftreten kann.

§ 5. Der Satz von Runge.

1. Die Fragestellung. Die bisherigen Überlegungen sind in einer bestimmten Richtung noch unbefriedigend: Wir haben die Folgerungen aus dem Mittag-Lefflerschen Satz nicht ganz so weit treiben können, wie die aus dem Weierstraßschen. Mit anderen Worten, wir haben gelernt, beliebige Funktionen, die in der vollen Ebene regulär oder meromorph sind, in Reihen rationaler Funktionen — Partialbruchreihen — zu entwickeln. Im allgemeinen Fall aber haben wir nur gelernt, daß es analytische Funktionen mit beliebig vorgegebenen Hauptteilen ihrer Pole gibt. Wir haben nicht gelernt, eine in einem gegebenen Bereiche bis auf Pole reguläre Funktion in eine Reihe rationaler Funktionen zu entwickeln. Wo liegt der Unterschied? Erinnern wir uns: Auch bei den meromorphen Funktionen stellten wir erst eine Funktion auf durch Ansatz einer konvergenten Reihe rationaler Funktionen, welche die gleichen Pole und die gleichen Hauptteile besitzt wie die gegebene. Alsdann mußte die Differenz eine in der ganze Ebene reguläre, also ganze Funktion sein, die eben bekanntlich durch eine überall konvergente Potenzreihe darstellbar ist. Im allgemeinen Falle aber würde diese Differenz nur eine in dem gegebenen Bereiche durchweg reguläre Funktion sein, für die uns aber, wenn der Bereich nicht zufällig gerade ein Kreis ist, keine so unmittelbar zugängliche Reihendarstellung zur Verfügung steht. Hier also liegt die Schwierigkeit.

2. Entwicklung in Reihen rationaler Funktionen. *Eine in einem gegebenen Bereiche reguläre Funktion läßt sich in eine Reihe rationaler Funktionen entwickeln, die in jedem inneren Teilbereich gleichmäßig konvergiert.*

Der Bereich sei B. Nach Satz XII auf S. 91 kann er als Grenzbereich polygonaler Bereiche aufgefaßt werden. Die Folge dieser Polygone sei $\Pi_1, \Pi_2, \cdots$ Man kann sie naturlich so wahlen, daß nicht zwei der Polygonkurven Punkte gemeinsam haben. Es sei z ein Punkt aus Π_{n-1}. Dann ist nach der Cauchyschen Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\pi_n} \frac{f(\mathfrak{z})}{\mathfrak{z} - z}\, d\mathfrak{z}.$$

Dabei wird das Integral uber das Polygon Π_n erstreckt, das von Π_{n-1} und seinen Innenpunkten einen von Null verschiedenen, d ubertreffenden Abstand haben möge. Nach den Uberlegungen von S. 106ff. ist dies Integral Grenzwert einer Summe:

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\mathfrak{z}_\varkappa) \Delta \mathfrak{z}_\varkappa}{\mathfrak{z}_\varkappa - z}.$$

Dabei liegen die Punkte $\mathfrak{z}_\varkappa$ auf der Polygonkurve Π_n. Somit ist die Funktion $f(z)$ als Grenzwert von rationalen Funktionen dargestellt. Faßt man diese als Teilsummen einer Reihe auf, so ist $f(z)$ in eine Reihe rationaler Funktionen entwickelt. Aber konvergiert diese auch in Π_{n-1} gleichmäßig? Auch hierauf finden wir leicht die Antwort, wenn wir uns an die Betrachtungen von S. 110 zuruckerinnern. Dort haben wir gelernt, daß der Unterschied eines Integrales von einer Naherungssumme hochstens

$$2\,\varepsilon L$$

betragt, wenn L die Lange der Integralkurve bedeutet und die Schwankung des Integranden in den Teilintervallen des Integrationsweges kleiner als ε ist. Es kommt also hier auf die Differenz

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\mathfrak{z}')}{\mathfrak{z}' - z} - \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\mathfrak{z}'')}{\mathfrak{z}'' - z}$$

an. Nimmt man noch ausdrucklich an, daß das Polygon Π_{n-1} ganz im Endlichen liegt, so sei M eine obere Schranke fur den absoluten Betrag von z. Da weiter, nach Voraussetzung, d der Abstand von Π_{n-1} und Π_n ist, so erkennen wir, daß diese Differenz kleiner ist als

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{d} \Big|\, |f(\mathfrak{z}')| - |f(\mathfrak{z}'')| \,\Big|,$$

und das kann offenbar durch genugend feine Wahl der Einteilung von Π_n unter ε heruntergedruckt werden. Diese Wahl der Einteilung ist fur alle z aus Π_{n-1} die gleiche, und daher streben die rationalen Funktionen gleichmäßig gegen $f(z)$, solange z dem Polygon Π_{n-1} angehort. Die Pole dieser rationalen

Funktionen liegen auf dem Polygon Π_n. Will man nun endlich, wie es im Satz behauptet ist, eine in jedem Teilbereich von B gleichmaßig konvergente Reihe für $f(z)$ haben, so wahle man wieder eine Folge positiver, gegen Null abnehmender Zahlen $\varepsilon_\varkappa$. Man wahle dann eine rationale Funktion $R_\varkappa(z)$ aus, die in $\Pi_\varkappa$ um weniger als $\varepsilon_\varkappa$ von $f(z)$ verschieden ist. Dann gilt wieder

$$f(z) = \lim_{\nu \to \infty} R_\varkappa(z),$$

und das gilt gleichmaßig in jedem Polygon Π_n und damit in jedem inneren Teilbereich von B, da ein jeder von einem solchen Polygon genugend hoher Nummer umschlossen wird.

3. Verlagerung der Pole der Reihenglieder. Es ist nun noch ein Schonheitsfehler dieses Resultates, daß die benutzten rationalen Funktionen im Bereiche B Pole aufweisen. Man kann diesen Schonheitsfehler beseitigen und die eben gefundenen rationalen Funktionen durch andere ersetzen, die im Inneren von B keine Pole haben. Wenn B einfach zusammenhangend ist, so kann man sogar alle Pole ins Unendliche legen und somit $f(z)$ in eine in B gleichmaßig konvergente Reihe von Polynomen entwickeln.

Die Methode, die Runge ausgedacht hat, um dies noch zu beweisen, beruht auf einer Verschiebung der bisher vorhandenen Pole. Durch dieselbe soll gezeigt werden, daß man eine rationale Funktion, deren Pole am Rande von Π_n liegen, durch eine andere rationale Funktion ersetzen kann, deren Pole an beliebigen[1]) im Außeren von Π_n vorgegebenen Stellen liegen, und die sich im Inneren von Π_{n-1} von der gegebenen um weniger als eine gegebene Zahl ε unterscheidet. Der Partialbruchzerlegung von $R_n(z)$ entsprechend wird es genugen, diesen Nachweis fur einen einzelnen Partialbruch $\sum \frac{A_\nu}{(z-a)^\varkappa}$ zu erbringen. Da der Rand des Π_n von Π_{n-1} um d absteht, so kann man, von a ausgehend, eine Kurve $\mathfrak{C}$ zu dem gewunschten neuen Pol b zeichnen, die uberall um mindestens d von Π_{n-1} absteht. Man kann also um jeden ihrer Punkte einen Kreis vom Radius d zeichnen, in dessen Außerem Π_{n-1} liegt. Ich wahle zunächst die neue Polstelle a_1 auf der Kurve so, daß dem um sie mit dem Radius d gezeichneten Kreis auch die alte Polstelle a angehort. Ich werde dann zunachst diese Stelle a_1 als neue Polstelle einfuhren. Ich werde dann mehrmals hintereinander diesen Prozeß ausfuhren, bis der gewunschte Endpunkt b der Linie $\mathfrak{C}$ der einzige neue Pol geworden ist. Wenn L die Länge von $\mathfrak{C}$ ist, so hat man offenbar hochstens $\left[\frac{L}{d}\right] + 1 = \mu$ mal den Prozeß auszuführen. Schaltet man namlich auf der Kurve Punkte $a_0 = a, a_1, \cdots a_\mu = b$ ein, derart, daß ein Kreis vom Radius d um a_n stets a_{n-1} enthalt, so wird eine

1) Die neuen Pole mussen aber mit den alten außerhalb Π_n verbindbar sein.

Funktion, welche ihren einzigen Pol bei a_{n-1} hat, stets im Äußeren dieses Kreises regulär sein, und diesem Äußeren wird stets Π_{n-1} angehören. Kann man sie also mit jeder gewünschten Genauigkeit in Π_{n-1} durch eine Funktion $R(z)$ approximieren, welche nur bei a_n Pole besitzt, so ist das gewünschte Ergebnis erreicht. Führen wir das im einzelnen durch: Die Funktion

$$R_0(z) = \sum \frac{A_\varkappa}{(z-a)^\varkappa}$$

besitzt nur bei $z = a$ Pole. Der Punkt a_1 liege in einem Abstand kleiner als d von a im Äußeren von Π_n. Im Kreise $|z - a_1| > d$ ist die Funktion $R_0(z)$ regulär. Dem Äußeren eines noch etwas größeren Kreises gehört Π_{n-1} an. Ich entwickle $R_0(z)$ nach Potenzen von $\frac{1}{z-a_1}$, also in eine konvergente Reihe

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z-a_1}\right).$$

Diese konvergiert in Π_{n-1} gleichmäßig. Ich kann daher eine Partialsumme $R_1(z)$ derselben so bestimmen, daß für alle z aus Π_{n-1}

$$|R_0(z) - R_1(z)| < \frac{\varepsilon}{\mu}$$

bleibt. Nun gehe ich zum Punkt a_2 über, der in einem Abstand kleiner als d auf $\mathfrak{C}$ im Äußeren von Π_n gewählt ist. Auf Grund der gleichen Überlegung kann man nun eine rationale Funktion $R_2(z)$ bestimmen, deren einzige Pole bei a_2 liegen, und für die in ganz Π_{n-1}

$$|R_1(z) - R_2(z)| < \frac{\varepsilon}{\mu}$$

gilt. Daher ist nun

$$|R_0(z) - R_2(z)| < \frac{2\varepsilon}{\mu}$$

in ganz Π_{n-1}. So fortfahrend erhält man nach μ Schritten eine rationale Funktion, deren sämtliche Pole bei b liegen, und die sich in Π_{n-1} von der gegebenen um weniger als ε unterscheidet.

Wenden wir nun dies Ergebnis auf unsere Reihenentwicklung an. Im allgemeinsten Fall wird der Bereich B, in dem wir entwickeln wollten, mehrfach zusammenhängend sein. Dementsprechend umschließen die einzelnen Polygonränder Randpunkte von B. Unsere Überlegung lehrt, daß wir die auf einem solchen Polygonrand gelegenen Pole der Reihenglieder in Randpunkte von B oder in Punkte der Komplementärmenge von B verschieben können, welche von demjenigen Polygonrand umschlossen sind, dem die Pole angehören. Die $f(z)$ approximierende rationale Funktion wird dabei durch die neue mit den

erschobenen Polen in Π_{n-1} bis auf einen beliebig zu wählenden Fehler ε_{n-1} pproximiert. Wir wählen diese Fehler so, daß $\varepsilon_{n-1} \to 0$ strebt für $n \to \infty$. Dann konvergieren auch die neuen rationalen Funktionen mit den verschobe- en Polen in jedem inneren Teilbereich von B gleichmäßig gegen $f(z)$. Wir aben also den Satz:

Jede in einem gegebenen Bereich B reguläre Funktion kann in eine Reihe von ationalen Funktionen entwickelt werden, die in jedem inneren Teilbereich von B gleichmäßig konvergiert. Die rationalen Funktionen konnen dabei so gewählt verden, daß ihre sämtlichen Pole B nicht angehören.

4. Polynomreihen. Wir haben daruber hinaus sogar gelernt, daß man die Pole in gewisser Weise willkurlich wählen kann. Wir wollen daraus fur einen peziellen Fall noch eine weitergehende Folgerung ziehen. Der Bereich B moge infach zusammenhängend sein. Wenn es dann gelange, die sämtlichen Pole ns Unendliche zu verlegen, so hätten wir erkannt, daß man eine jede in B eguläre Funktion in eine in B konvergente Reihe von Polynomen entwickeln kann. Zunachst lehren ja unsere Uberlegungen leicht folgendes: Wenn B infach zusammenhängend ist und im Endlichen liegt, so kann man alle Pole n einen beliebigen endlichen Punkt der Komplementarmenge verlegen. Die Verlegung ins Unendliche kann man so nicht erschließen, weil sie ja nicht durch ndlich viele kleine Verschiebungen in der beschriebenen Weise zu bewerk- telligen ist. Aber man kann dann so schließen: Es ist ja nur zu zeigen, daß ine jede rationale Funktion, deren Pole auf Π_n liegen, durch ein Polynom fur lle z in Π_{n-1} beliebig genau angenahert werden kann. Ich verbinde die Pole mit ∞ durch Wege außerhalb Π_n. Dann wahle ich einen Punkt α außerhalb lieser Wege und außerhalb Π_n und mache die Hilfsabbildung $\frac{1}{z-\alpha} = w$. Aus $z = \infty$ wird ein endlicher Punkt $w = 0$. Die Wege liegen ganz im Endlichen, us den Π_n werden endliche Bereiche, die zu untersuchende rationale Funktion geht in eine andere uber, deren Pole eben am Rande des Bildes von Π_n liegen. Ich verschiebe sie alle nach 0 als dem Bild von Unendlich und erhalte eine neue rationale Funktion, die im Bild von Π_{n-1} das Bild von $R(z)$ mit der gegebenen Genauigkeit annahert.

Nun mache ich die Hilfsabbildung wieder ruckgangig. Dabei geht die ratio- nale Funktion, deren sämtliche Pole in 0 liegen, in ein Polynom uber, das $R(z)$ in Π_{n-1} mit der gewunschten Genauigkeit annahert. So finden wir als etzten Satz:

Eine jede in einem einfach zusammenhängenden Bereiche regulare Funktion cann in eine Reihe von Polynomen entwickelt werden, die in jedem inneren Teil- ereich von B gleichmäßig konvergiert.

Methoden freilich, solche Entwicklungen zu finden, enthalten diese Darlegungen nur in sehr unvollkommener Form. Immerhin aber besitzen die eben bewiesenen Sätze einen großen prinzipiellen Wert. Die Methode der konformen Abbildung (vgl. Bd. II) gibt aber Mittel an die Hand, solche Polynomentwicklungen wirklich anzugeben. Man vgl. G. Faber, Math. Ann. Bd. 57.

Vierzehnter Abschnitt.

Die Gammafunktion.

§ 1. Die Eulersche Summenformel.

1. Einfachste Form der Summenformel. $f(x)$ sei fur positive reelle x samt den weiter etwa zu benutzenden Ableitungen eindeutig und stetig erklart. Es soll

$$f(0)+f(1)+\cdots+f(n)+\cdots$$

in einer Form dargestellt werden, die es erlaubt, die Summe dieser Reihe abzuschatzen und es erlaubt, ihren Wert mit einiger Genauigkeit zu berechnen. Man hat zunachst

$$f(n)-f(\varkappa)=\int_{\varkappa}^{n} f'(x)\,dx.$$

Insbesondere also hat man

$$f(n)-f(0)=\int_{0}^{n} f'(x)\,dx$$

$$f(n)-f(1)=\int_{1}^{n} f'(x)\,dx$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f(n)-f(n)=\int_{n}^{n} f'(x)\,dx.$$

Die Addition dieser Formeln ergibt

$$(n+1)f(n)-\sum_{0}^{n}{}_{\varkappa} f(\varkappa)=\sum_{\varkappa=0,1,2\ldots n}\int_{\varkappa}^{n} f'(x)\,dx.$$

Zerlegt man jedes Integral auf der rechten Seite in eine Summe von Integralen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, so kommt dabei das Integral

$$\int_{\varkappa}^{\varkappa+1} f'(x)\,dx$$

ganzen $\varkappa+1$-mal vor. Daher kann man

$$(n+1)f(n)-\sum_0^n{}_\varkappa f(\varkappa)=\int_0^n\{[x]+1\}f'(x)\,dx$$

ıreıben. Dabei bedeutet $[x]$ die großte ganze Zahl unter x. Setzt man dann

$$P_1(x)=[x]-x+\frac{1}{2},$$ so wird

$$+1)f(n)-\sum_0^n f(\varkappa)=\int_0^n P_1(x)f'(x)\,dx+\int_0^n xf'(x)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^n f'(x)\,dx$$

$$=\int_0^n P_1(x)f'(x)\,dx+nf(n)-\int_0^n f(x)\,dx+\frac{1}{2}f(n)-\frac{1}{2}f(0).$$

Also hat man

$$)\qquad \sum_0^n{}_\varkappa f(\varkappa)=\int_0^n f(x)\,dx+\frac{1}{2}\,(f(n)+f(0))-\int_0^n P_1(x)f'(x)\,dx.$$

2. Beispiel. Schon in dieser einfachsten Gestalt leistet diese *Eulersche ımmenformel,* die wir hier im Anschluß an *Wırtınger* abgeleitet haben, oft ıtzliche Dienste. Hier sei nur erst ein ganz einfaches Beispiel gegeben:

Ich wähle $$f(x)\equiv\frac{1}{1+x}.$$

ann liefert die Formel (2)

$$l+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}=\log(n+1)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+n}+1\right)+\int_0^n P_1(x)\,\frac{1}{(1+x)^2}\,dx.$$

a nun aber $$|\,P_1(x)\,|\leqq\frac{1}{2}$$

lt, so konvergiert $$\int_0^\infty P_1(x)\,\frac{1}{(1+x)^2}\,dx.$$

aher findet man

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\log(n+1)\right)=\frac{1}{2}+\int_0^\infty P_1(x)\,\frac{1}{(1+x)^2}\,dx.$$

an hat also den *Satz.*

Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\log(n+1)\right)$

existiert. Man nennt seinen Wert die *Eulersche Konstante* und bezeichnet sie mit γ.

Wir werden bald sehen, daß eine Ausgestaltung der Eulerschen Summenformel (2) die Mittel bietet, γ mit jeder gewünschten Genauigkeit auszurechnen.

3. Die Funktion $P_\varkappa(x)$. Man gewinnt diese Ausgestaltung, indem man auf das Restintegral der Formel (2) Produktintegration anwendet. Bevor wir das tun, wollen wir uns erst die Funktion (1), also

$$P_1(x) = [x] - x + \frac{1}{2}, \text{ etwas näher ansehen.}$$

Die Reihe
$$\log(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \cdots$$

konvergiert noch auf dem Einheitskreis, wofern $z \neq 1$ ist. Denn trägt man $z = e^{-i\varphi}$ ein, so erhält man

$$\log(1-e^{-i\varphi}) = -e^{-i\varphi} - \frac{e^{-2i\varphi}}{2} - \cdots.$$

Setzt man
$$s_n = e^{-i\varphi} + e^{-2i\varphi} + \cdots + e^{-ni\varphi} = e^{-i\varphi}\frac{1-e^{-ni\varphi}}{1-e^{-i\varphi}},$$

so wird

$$e^{-i\varphi} + \frac{e^{-2i\varphi}}{2} + \cdots + \frac{e^{-ni\varphi}}{n} = s_1 + \frac{s_2 - s_1}{2} + \cdots + \frac{s_n - s_{n-1}}{n}$$
$$= s_1\left(1 - \frac{1}{2}\right) + s_2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + s_{n-1}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \frac{s_n}{n}.$$

Da nun aber für jedes $0 < \varphi < 2\pi$ wegen $|s_n| < \frac{2}{|e^{i\varphi}-1|}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = 0 \tag{3}$$

gilt, so konvergieren die beiden Reihen

$$\sum \frac{e^{-i\nu\varphi}}{\varkappa} \quad \text{und} \quad \sum s_\varkappa\left(\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{\varkappa+1}\right)$$

gleichzeitig und haben die gleiche Summe. Dazu bemerke man noch, daß für jedes $\delta > 0$ in $\delta \leqq \varphi \leqq 2\pi - \delta$ der Grenzwert (3) gleichmäßig gilt. Die Reihe

$$\sum s_\varkappa\left(\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{\varkappa+1}\right)$$

konvergiert aber gleichmäßig und absolut. Denn es ist ja

$$|s_\varkappa| < \frac{2}{|1-e^{-i\varphi}|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|} < \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

und
$$\sum\left(\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{\varkappa+1}\right)$$

nvergiert. Daher folgt aus dem Abelschen Grenzwertsatz von S. 28, daß f jedem $z = 1$ nicht enthaltenden abgeschlossenen Bogen des Einheitskreises ichmäßig

$$\log(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \cdots$$

t. Nun ist aber weiter für den hierdurch dargestellten Zweig des Logarithmus r Imaginärteil in $|z| \leqq 1$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ gelegen. Daher ist für $< x < 1$

$$\Im\left\{\log(1-e^{-2i\pi x})\right\} = \pi\left(\frac{1}{2} - x\right).$$

nn man hat

$$\begin{aligned}\Im\{\log(1-e^{-2i\pi x})\} &= \Im[\log(1-\cos 2\pi x + i\sin 2\pi x)]\\ &= \Im[\log(2\sin^2\pi x + i2\sin\pi x\cos\pi x)]\\ &= \Im\log[2\sin\pi x(\sin\pi x + i\cos\pi x)]\\ &= \Im\log[\sin\pi x + i\cos\pi x]\\ &= \Im\log[i(\cos\pi x - i\sin\pi x)]\\ &= \frac{\pi}{2} - \pi x.\end{aligned}$$

rner ist $\Im\log(1-e^{-2\pi ix})\ \sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2} + \frac{\sin 6\pi x}{3} + \cdots.$

her gilt nun allgemein für nichtganzzahliges x

$$P_1(x) = \sum_1^\infty \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}.$$

Für ganzzahliges x wird $P_1(x) = \frac{1}{2}$, während die Fouriersche Reihe den Wert iefert Dies kommt daher, daß $P_1(x)$ bei Annäherung an ganzzahlige Werte n links den Grenzwert -1, bei Annäherung von rechts den Grenzwert 1 hat.

Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Strecke, die nen ganzzahligen Punkt enthält. Setzt man daher

$$P_2(x) = \sum_1^\infty \frac{\cos 2n\pi x}{2n^2\pi^2},$$

ist

$$P'_2(x) = -P_1(x).$$

rner ist

$$P_2(0) = \frac{B_1}{2} = \frac{1}{12}$$

(vgl. S. 166).[1]) Weiter setze ich

$$P_3(x) = \sum_1^\infty \frac{\sin 2n\pi x}{4n^3\pi^3}.$$

Dann ist $$P'_3(x) = P_2(x),\ P_3(0) = 0.$$
Allgemein sei

$$(4)\qquad P_{2\varkappa}(x) = \sum_1^\infty \frac{\cos 2n\pi x}{2^{2\varkappa-1}n^{2\varkappa}\pi^{2\varkappa}},\quad P_{2\varkappa+1}(x) = \sum_1^\infty \frac{\sin 2n\pi x}{2^{2\nu}\cdot n^{2\varkappa+1}\cdot \pi^{2\varkappa+1}}.$$

Dann gilt $$P'_{2\varkappa}(x) = -P_{2\varkappa-1}(x),\quad P'_{2\varkappa+1}(x) = P_{2\varkappa}(x),$$

und es ist nach S. 187

$$P_{2\varkappa}(0) = \frac{B_\varkappa}{(2\varkappa)!},\quad P_{2\varkappa+1}(0) = 0.$$

Diese Darlegungen zeigen auch, daß man für $0 < x < 1$ hat

$$P_1(x) = -x + \frac{1}{2}$$

$$P_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}$$

$$P_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}\quad \text{usw.}$$

4. Die Eulersche Summenformel. Diese mit den Bernoullischen nahe verwandten Polynome werden nun bei der Umformung des Restgliedes von (2) durch Produktintegration auftreten. Man hat nämlich

$$\int_0^n f'(x)P_1(x)\,dx = -f'(x)P_2(x)\Big|_0^n + \int_0^n f''(x)P_2(x)\,dx$$

$$= -P_2(0)(f'(n) - f'(0)) + \int_0^n f''(x)P_2(x)\,dx.$$

1) Man kann auch so schließen: Man sieht an der Fourierschen Reihe für $P_2(x)$ sofort, daß $\int_0^1 P_2(x)\,dx = 0$ ist. Daher ist $P_2(x)$ bestimmt durch die Bedingung $P'_2 = -P_1$, $\int_0^1 P_2\,dx = 0$. Sucht man derselben, ausgehend von $P_1 = \frac{1}{2} - x$ $(0 < x < 1)$, zu genügen, so hat man $P_2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + c$, wo c aus der Bedingung $\int_0^1 P_2\,dx = 0$ sich zu $\frac{1}{12}$ ergibt. Daher ist $P_2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$.

So findet man die Formel

$$\sum_0^n f(\varkappa) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}\,(f(n) + f(0)) + \frac{B_1}{2}\,(f'(n) - f'(0)) - \int_0^n f''(x)\,P_2(x)\,dx.$$

Nun ist aber

$$\int_0^n f''(x)\,P_2(x)\,dx = f''(x)\,P_3(x)\Big|_0^n - \int_0^n f'''(x)\,P_3(x)\,dx.$$

Hier verschwindet aber der ausintegrierte Bestandteil, weil $P_3(0) = P_3(n) = 0$ ist. Daher gilt auch die Formel

$$\sum_0^n f(\varkappa) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}\,(f(n) + f(0)) + \frac{B_1}{2}\,(f'(n) - f'(0)) + \int_0^n f'''(x)\,P_3(x)\,dx.$$

Wendet man auf das vorkommende Restglied mehrmals den eben erläuterten Prozeß an, so findet man die folgende allgemeine Eulersche Summenformel:

$$\begin{aligned}\sum_0^n f(\varkappa) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}\,(f(n)+f(0)) &+ \frac{B_1}{2}\,(f'(n) - f'(0)) \\ &- \frac{B_2}{4!}\,(f'''(n) - f'''(0)) \\ &+ \frac{B_3}{6!}\,(f^{(5)}(n) - f^{(5)}(0)) \\ &\;\;\vdots \\ &+ (-1)^{\varkappa}\,\frac{B_{\varkappa+1}}{(2\varkappa+2)!}\,(f^{(2\varkappa+1)}(n) - f^{(2\varkappa+1)}(0)) \\ &+ (-1)^{\varkappa}\int_0^n P_{2\varkappa+3}(x)\,f^{(2\varkappa+3)}(x)\,dx.\end{aligned} \tag{5}$$

Man darf nun nicht etwa erwarten, daß in dieser allgemeinen Eulerschen Summenformel mit wachsendem $\varkappa$ das Restintegral gegen Null strebe und daß dann eine besonders gut konvergente Reihe entstehe. Das ist nicht der Fall, denn die Bernoullischen Zahlen wachsen sehr stark an mit wachsender Nummer. Auf S. 187 gaben wir nämlich die Formel

$$S_{2n} = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}\,B_n$$

an. Dabei war S_{2n} die Summe der Reihe

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots,$$

also eine sicher die Eins übertreffende Zahl. Man findet daher

$$\frac{B_n}{2n} > \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{2\pi} \cdots \frac{7}{2\pi} \cdot \frac{8}{2\pi} \cdots \frac{2n-1}{2\pi} > \frac{7!}{\pi^8 \cdot 2^7} \cdot \left(\frac{8}{2\pi}\right)^{2n-8},$$

so daß also $\frac{B_n}{2n} \to \infty$ für $n \to \infty$. Da aber auch die

$$\frac{f^{(2n-1)}(x)}{(2n-1)!}$$

als Koeffizienten der Taylorentwicklung von $f(x)$ im allgemeinen nicht nach Null streben, so würde eine Reihe herauskommen, deren Glieder nicht einmal den Grenzwert Null hätten.

5. Beispiel. Die Brauchbarkeit der Summenformel zur numerischen Rechnung muß also auf anderen Umständen beruhen. Welche das sind, wird durch die Behandlung eines Beispieles am klarsten werden.

Ich will die Eulersche Konstante berechnen. Ich setze also wieder wie vorhin

$$f(x) \equiv \frac{1}{1+x}.$$

Dann liefert (5)

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\log(n+1) = \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2} &- \frac{B_1}{2}\left(\frac{1}{(1+n)^2}-1\right) \\ (6) \qquad &+ \frac{B_2}{4}\left(\frac{1}{(1+n)^4}-1\right) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &-(-1)^\nu \frac{B_{\nu+1}}{(2\varkappa+2)}\left(\frac{1}{(1+n)^{2\varkappa+2}}-1\right) \\ &-(-1)^\varkappa \cdot \int_0^n P_{2\nu+3}(x)\frac{(2\varkappa+3)!}{(1+x)^{2\varkappa+4}}\,dx. \end{aligned}$$

Daher findet man für $n \to \infty$

$$(7) \quad \gamma = \frac{1}{2}+\frac{B_1}{2}-\frac{B_2}{4}+\cdots+(-1)^\nu\frac{B_{\nu+1}}{2\varkappa+2}-(-1)^\varkappa\int_0^n P_{2\varkappa+3}(x)\frac{(2\varkappa+3)!}{(1+x)^{2\varkappa+4}}\,dx.$$

Hier mag nun zunächst das Restintegral untersucht werden. Man findet z. B. für $\varkappa = 2$ (nach (4))

$$|P_7(x)| < \frac{1}{2^6 \cdot \pi^7}\left(1+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}+\cdots\right) < \frac{1}{2^6}\frac{1}{\pi^7}\left(1+\int_1^\infty \frac{dx}{x^7}\right) = \frac{1}{2^6}\frac{1}{\pi^7}\cdot\frac{7}{6}.$$

Also wird $\quad 7!\int_3^\infty P_7(x)\frac{1}{(1+x)^8}\,dx < 7!\,\frac{1}{2^6}\,\frac{1}{\pi^7}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{4^7} < \frac{1}{2}\,\frac{1}{10^6}.$

Die Berechnung von $\int\limits_0^\infty$ kann also auf die von $\int\limits_0^3$ zurückgeführt werden, wenn man sich mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{2}\,\frac{1}{10^6}$ begnügen will. Für

$$\int\limits_0^3 P_7(x)\,\frac{7!}{(1+x)^8}\,dx$$

aber hat man nach (6) für $n = 3$ die Darstellung

$$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\log 4+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-\frac{B_1}{2}\left(\frac{1}{16}-1\right)+\frac{B_3}{4}\left(\frac{1}{16^2}-1\right)-\frac{B_5}{6}\left(\frac{1}{16^3}-1\right).$$

Man findet also $\quad \int\limits_0^3 P_7(x)\,\frac{7!}{(1+x)^8}\,dx = 0{,}018374\ldots$

Also $\quad \int\limits_0^\infty P_7(x)\,\frac{7!}{(1+x)^8}\,dx = 0{,}018374\cdots \pm \frac{1}{2}\,\frac{1}{10^6} = 0{,}01837\ldots$

Tragt man dies in (7) ein, wo $\varkappa = 2$ zu nehmen ist, so erhält man

$$\gamma = 0{,}5772\ldots$$

Will man eine erhöhte Genauigkeit haben, so muß man das Restintegral genauer bestimmen. Dazu muß man in dem Näherungsintegral

$$\int\limits_0^n P_7(x)\,\frac{7!}{(1+x)^8}\,dx$$

$n > 3$ wählen. Zu seiner Berechnung hat man aber dann mehr Glieder nötig. Man wird aber den Wunsch haben, mit möglichst wenig Gliedern der Reihe $\sum \frac{1}{n}$ auszukommen. Man hat dazu noch die Wahl von $\varkappa$ frei. Man wird zusehen, $\varkappa$ so zu wählen, daß die Rechenarbeit möglichst klein wird.

§ 2. Definition der Gammafunktion.

Die Einführung der Gammafunktion entsprang historisch dem Wunsch, den Begriff der Fakultät $x!$ auf nichtganzzahlige x auszudehnen. Durch diese Forderung allein ist natürlich noch keine Funktion bestimmt. Denn es gibt viele, auch analytische Funktionen, welche für ganzzahlige Argumente übereinstimmen. Ihre Mannigfaltigkeit wird schon etwas mehr eingeschränkt, wenn man verlangt, daß $\Gamma(z)$ eine meromorphe Funktion sein soll, welche der Differenzgleichung

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$$

und der Bedingung $\Gamma(1) = 1$ genügt.[1]) Der Quotient zweier Funktionen, die dieser Differenzengleichung genugen, besitzt die Periode Eins. Denn aus

$$f_1(z+1) = z f_1(z)$$

und

$$f_2(z+1) = z f_2(z)$$

folgt

$$\frac{f_1(z+1)}{f_2(z+1)} = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}.$$

Unter allen diesen Funktionen ist die einfachste die durch den Gaußschen Ausdruck

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

erklarte.[2]) Es wird ja

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{nz}{z+n+1} = z.$$

Stellt aber dieser Ausdruck wirklich eine analytische Funktion dar? Das sieht man am besten, wenn man durch eine geringe Umformung des Ausdrucks Anschluß an die Weierstraßsche Produktdarstellung der ganzen Funktionen sucht. Es wird nämlich

$$\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!\,n^z} = e^{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)z} \cdot z \cdot \{(1+z)e^{-z}\}\cdots\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}.$$

Da nun aber

$$1+\frac{1}{2}\cdots+\frac{1}{n}-\log n \longrightarrow \gamma$$

strebt fur $n \longrightarrow \infty$ (vgl. S. 304) und da das Produkt

$$\prod\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}$$

nach S. 295 eine ganze Funktion darstellt, so wird

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z}\cdot z \prod_1^\infty \left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}$$

eine ganze Funktion.

Damit ist zugleich auch die gleichmaßige Konvergenz des Gaußschen Ausdruckes erkannt. $\Gamma(z)$ ist also eine meromorphe Funktion, welche nirgends verschwindet — sonst wäre die Reziproke nicht ganz — und welche an den negativen ganzzahligen Stellen $z = -n$ und bei $z = 0$ einfache Pole besitzt.

1) Dann wird $\Gamma(z+1) = z!$ bei ganzzahligem z.

2) Der Wert von n^z ist aus $n^z = e^{z\log n}$ eindeutig bestimmt, wenn wir festsetzen, daß $\log n$ reell gewählt sein soll.

Wir bestimmen noch die Residuen dieser Pole. Zu dem Zweck haben wir $\lim_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z)$ zu betrachten. Nun ist aber

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Also wird
$$(z+n)\,\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}$$

Daher ist
$$\lim_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z) = \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)} = \frac{\Gamma(1)}{(-1)^n n!}.$$

Nun entnimmt man noch dem Gaußschen Ausdruck sofort, daß $\Gamma(1) = 1$ ist. Also besitzt die Funktion $\Gamma(z)$ an der Stelle $z = -n$ einen einfachen Pol vom Residuum $\frac{(-1)^n}{n!}$. Bei $z = 0$ ist das Residuum 1.

§ 3. Eine Haupteigenschaft der Funktion $\Gamma(z)$.

$\Gamma(z)$ hat eine Reihe von Polen, nämlich $z = 0, -1, -2, \ldots$ mit der Funktion $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ gemeinsam. Ebenso hat $\Gamma(1-z)$ die Pole $z = 1, 2 \ldots$ mit $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ gemeinsam. Daher hat $\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z)$ dieselben Pole wie $\frac{\pi}{\sin \pi z}$. Daher ist $\sin \pi z \cdot \Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z)$ eine polfreie, also eine ganze Funktion. Man kann sie bestimmen und sehen, daß sie konstant ist. Es wird nämlich

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \to \infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!\,n^z} = \lim_{n \to \infty} \frac{z(z+1)\left(\frac{z}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z}{n}+1\right)}{n^z}$$ und

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = \lim_{n \to \infty} \frac{(1-z)(2-z)\cdots(n+1-z)}{n!\,n^{1-z}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(1-z)\left(1-\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{n}\right)}{n^{-z}} \frac{(n+1-z)}{n}$$

Daher wird

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \frac{1}{\Gamma(1-z)} = \lim_{n \to \infty} z\,(1-z^2)\left(1-\left(\frac{z}{2}\right)^2\right)\cdots\left(1-\left(\frac{z}{n}\right)^2\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi}.$$

Also ist
$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Trägt man hier $z = \frac{1}{2}$ ein, so findet man $\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = \pi$. Da man aber nun weiter dem Gaußschen Ausdruck ansieht, daß $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ positiv ist, so ergibt sich

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = +\sqrt{\pi}.$$

Ich füge noch die *Potenzreihenentwicklung* von $\log \Gamma(1+z)$ in der Umgebung von $z=0$ an. Sie ergibt sich leicht aus der Weierstraßschen Produktdarstellung der Gammafunktion. Diese liefert nämlich

$$\frac{d \log \Gamma(z)}{dz} = -\gamma + \left(1 - \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{z+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n-1}\right) + \cdots$$

und daraus

$$\frac{d \log \Gamma(1+z)}{dz} = -\gamma + \left(1 - \frac{1}{z+1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{z+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right) + \cdots$$

Daraus findet man durch Differenzieren

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n \log \Gamma(1+z)}{dz^n} = \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{(z+1)^n} + \frac{1}{(z+2)^n} + \cdots\right).$$

Bildet man dies an der Stelle $z=0$, so hat man

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n \log \Gamma(1+z)}{dz^n}\bigg|_{z=0} = \frac{(-1)^n}{n} S_n.$$

Daher wird $$\log \Gamma(1+z) = -\gamma z + \frac{z^2}{2} S_2 - \frac{z^3}{3} S_3 + \cdots.$$

§ 4. Die Stirlingsche Formel.

In die Formel (2) auf S. 304 trage man

$$f(x) = \log(z+x)$$

ein. Dann erhält man

$$\sum_0^n \log(z+\varkappa) = \int_0^n \log(z+x)\,dx + \frac{1}{2}\left(\log(z+n) + \log z\right) - \int_0^n \frac{P_1(x)}{z+x}\,dx$$

$$= \left(z+n+\frac{1}{2}\right)\log(z+n) - \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - n - \int_0^n \frac{P_1(x)}{z+x}\,dx.$$

Hier trage man $z=1$ ein, ziehe die so erhaltene Formel von der vorigen ab und bringe außerdem auf beiden Seiten $(z-1)\log n$ in Abzug. So erhält man

$$\sum_0^n \log\frac{z+n}{1+n} - (z-1)\log n = (z-1)\log\left(1+\frac{z}{n}\right) + \left(1+n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{z-1}{1+n}\right)$$

$$-\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - \int_0^n \frac{P_1(x)}{z+x}\,dx + \int_0^n \frac{P_1(x)}{1+x}\,dx.$$

Daher wird weiter

$$\lim_{n\to\infty} \log \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{1\cdot 2\cdots(n+1)}\cdot n^{-z+1} = (z-1) + \left(\frac{1}{2} - z\right)\log z - \int_0^\infty \frac{P_1(x)}{z+x}\,dx$$

$$+ \int_0^\infty \frac{P_1(x)}{1+x}\,dx.$$

Läßt man links noch den Faktor $\frac{n}{n+1}$ weg, so hat man schließlich

$$\text{(1)}\qquad \log\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + 1 - \int_0^\infty \frac{P_1(x)}{1-x}\,dx + \int_0^\infty \frac{P_1(x)}{z+x}\,dx.$$

Diese Formel gilt für alle nichtnegativen Werte von z, d. h. in der ganzen z-Ebene mit Ausschluß der negativen reellen Achse. Man hat übrigens in der so aufgeschlitzten Ebene immer diejenigen Zweige der Logarithmen zu nehmen, welche auf der positiven reellen Achse reell sind. Zur Auswertung des Integrales

$$\int_0^\infty \frac{P_1(x)}{1+x}\,dx$$

schreitend, bemerken wir zunächst, daß für rein imaginäre z

$$\lim_{z\to\infty} \int_0^\infty \frac{P_1(x)}{z+x}\,dx = 0$$

gilt. Man hat nämlich

$$\int_0^\infty \frac{P_1(x)}{z+x}\,dx = P_2(0)\,\frac{1}{z} - \int_0^\infty \frac{P_2(x)}{(z+x)^2}\,dx,$$

und hier ist
$$\left|\frac{P_2(x)}{(z+x)^2}\right| < \frac{Max\,|P_2(x)|}{|z+x|^2}.$$

Daher hat man
$$\int_0^\infty \frac{P_2(x)\,dx}{(z+x)^2} < Max\,|P_2(x)| \int_0^\infty \frac{dx}{|z+x|^2}$$

Ich mache die Substitution $z = re^{i\varphi}$, $x = rx_1$ und finde

$$\int_0^\infty \frac{dx}{|z+x|^2} = \frac{1}{r}\int_0^\infty \frac{dx_1}{|e^{i\varphi}+x_1|^2}.$$

Für alle $\varphi \neq \pi$ hat dies zweite Integral einen endlichen Wert und hängt stetig von φ ab. Daher gilt für $z \to \infty$

$$\int_0^\infty \frac{P_2(x)}{(z+x)^2}\,dx \to 0,$$

und dies gilt gleichmäßig für solche z-Werte, die in einem Winkelraum $|\arg z| \leqq \pi - \delta$ $(\delta > 0)$ gegen Unendlich streben.

Aus $$\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

schließt man weiter wegen $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$

$$\Gamma(z)\ \Gamma(-z) = \frac{-\pi}{z\cdot \sin \pi z}.$$

Also wird (y reell) $$|\Gamma(iy)| = \sqrt{\frac{2\pi}{y(e^{\pi y} - e^{-\pi y})}}.$$

Daher hat man aus (1), da $1 - \int_0^\infty \frac{P_1(x)}{1+x}\,dx$ reell ist,

$$1 - \int_0^\infty \frac{P_1(x)}{1+x}\,dx = \Re\left\{\log\Gamma(iy) - \left(iy - \frac{1}{2}\right)\log(iy) + iy - \int_0^\infty \frac{P_2(x)}{iy+x}\,dx\right\}$$

$$= \lim_{y\to\infty}\left\{\log|\Gamma(iy)| + \frac{1}{2}\log y + \frac{\pi y}{2}\right\} = \lim_{y\to\infty}\log\sqrt{\frac{2\pi\cdot y\cdot e^{\pi y}}{y(e^{\pi y} - e^{-\pi y})}} = \frac{\log(2\pi)}{2}.$$

So findet man endlich die *Stirlingsche Formel*

$$\log\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \int_0^\infty \frac{P_1(x)}{z+x}\,dx,$$

in welcher das Restintegral für $z \to \infty$ gegen Null strebt.

Aus ihr wieder entnimmt man

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Gamma(z)}{z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}\sqrt{2\pi}} = 1.$$

Dafür schreibt man auch kurz

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\,e^{-z}z^{z-\frac{1}{2}}$$

für alle z, für die $-\pi + \delta \leqq \arg z \leqq \pi - \delta$ ist; wobei δ irgendeine positive Zahl unter π bedeutet. Man liest das Zeichen $\sim$: „asymptotisch gleich".

Daraus folgt $$n! = \Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi}\,e^{-n-1}(n+1)^{n+\frac{1}{2}}$$
$$\sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

§ 5. Darstellung der Γ-Funktion durch ein bestimmtes Integral.

Für alle Werte von z, deren Realteil positiv ist, gilt die Darstellung

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Das Integral ist dabei über die positive reelle Achse zu erstrecken.

Diese Formel kann man ihrerseits zum Ausgangspunkt, also als Definition der Gammafunktion, wählen und so einen anderen Aufbau der Theorie geben.

Betrachten wir zum Beweis die Funktion

$$G(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

S. 174 wurde gezeigt, daß das Integral für alle $\Re(z) > 0$ konvergiert und eine in dieser Halbebene analytische Funktion darstellt.

Man erkennt leicht durch partielle Integration, daß die Funktion

$$G(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

der Differenzengleichung $\quad G(z+1) = zG(z)$

genügt. Der Quotient $\quad q(z) = \frac{G(z)}{\Gamma(z)}$

ist daher nach S. 311 eine periodische Funktion der Periode Eins. Es ist zu zeigen, daß diese Funktion den konstanten Wert Eins hat. Nach den S. 286 gegebenen Darlegungen über periodische Funktionen ist dazu vor allem eine Abschätzung des Quotienten in einem Periodenstreifen nötig. Ich wähle dazu den Streifen $1 \leqq x \leqq 2$ $(z = x + iy)$.

Der Cauchysche Integralsatz läßt erkennen, daß man die Integration in $G(z)$ statt über die reelle Achse ebensogut über irgendeine andere der rechten Halbebene $\Re(z) > 0$ angehörige geradlinige Verbindung von Null und Unendlich erstrecken darf. Ich wähle diejenige Gerade, die z enthält, und trage daher im Integral $t = z\varrho$ (ϱ positiv) ein. Dann habe ich

$$G(z) = z^z \int_0^\infty e^{-z\varrho} \varrho^{z-1} d\varrho.$$

Für $1 \leqq x \leqq 2$ wird

$$|G(z)| \leqq |z^z| \left\{ \int_0^1 d\varrho + \int_1^\infty e^{-\varrho} \varrho \, d\varrho \right\} \leqq 2\,|z^z|.$$

$\left(\text{Denn es ist ja} \int_1^\infty e^{-\varrho}\varrho\, d\varrho < \int_0^\infty e^{-\varrho}\varrho\, d\varrho = 1.\right)$

Die Stirlingsche Formel lehrt ferner, daß

$$|\Gamma(z)| > |z^{z-1}|,$$

falls $1 \leqq x \leqq 2$ ist und $|y|$ hinreichend groß gewählt wird. Daher ist für große $|y|$ des Streifens $1 \leqq x \leqq 2$

$$|q(z)| < 2\,|z|$$

Daraus folgt aber, daß $g(z)$ konstant sein muß. Denn führt man $w = e^{2\pi i z}$ ein, so wird $q(z) = Q(w)$ eine rationale Funktion von w. Singularitäten derselben können höchstens bei $w = 0$ und bei $w = \infty$ liegen. Nun hat man aber durchweg

$$|Q(w)| < \frac{|\log w|}{\pi}$$

Daher wird $\quad \lim\limits_{w \to 0} w\; Q(w) = 0 \quad$ und $\quad \lim\limits_{w \to \infty} \frac{Q(w)}{w} = 0$

Somit können weder bei $w = 0$ noch bei $w = \infty$ Pole liegen. Daher ist $Q(w) = q(z)$ konstant. Da aber $G(1) = \Gamma(1) = 1$ ist, so ist

$$G(z) = \Gamma(z),$$

was zu beweisen war.

§ 6. Integraldarstellung der Funktion $\frac{1}{\Gamma(z)}$.

Wir gehen von der mehrdeutigen Funktion $f(s) = e^s s^{-z}$ aus. Sie besitzt bei $s = 0$ einen Verzweigungspunkt unendlicher Ordnung. Betrachten wir also die Funktion in der längs der negativen reellen Achse aufgeschnittenen Ebene, so zerfällt sie in diesem Bereiche in unendlichviele eindeutige Zweige. Wir wollen auf folgende Weise einen bestimmten derselben herausgreifen und weiterhin festhalten. Wir führen Polarkoordinaten ein, indem wir $s = \varrho e^{-i\vartheta}$ setzen. Dann ist unser Bereich durch die Ungleichungen $-\pi < \vartheta < +\pi$ festgelegt. Wir setzen

(1) $$f(s) = e^z \varrho^{-z} e^{i\vartheta z}.$$

Unter ϱ^{-z} sei dabei die Funktion $e^{-\log \varrho \, z}$ verstanden, und für $\log \varrho$ sei der reelle Wert genommen. Auf den Begrenzungsgeraden $\vartheta = -\pi$ und $\vartheta = \pi$ wird dann $f(s) = e^s \varrho^{-z} e^{-i\pi z}$ und $f(s) = e^s \varrho^z e^{i\pi z}$. Wir benötigen noch eine gewisse Abschätzung der Funktion in der Halbebene $\Re(s) < 0$. Es wird für $s = \sigma + i\tau$, $z = x + iy$

$$|f(s)| = e^{\sigma} \cdot (\sigma^2 + \tau^2)^{-\frac{x}{2}} \; e^{-\vartheta y}. \tag{A}$$

Betrachtet man also das Integral

$$\int\limits_{\alpha + i\gamma}^{\alpha + i\beta} f(s)\, ds$$

über den aus Fig. 78 ersichtlichen geradlinigen Integrationsweg ($\alpha < 0$), so hat man

$$\int\limits_{\alpha + i\gamma}^{\alpha + i\beta} f(s)\, ds \; < e^{\alpha} \int\limits_{\gamma}^{\beta} (\alpha^2 + \tau^2)^{-\frac{x}{2}} e^{-\vartheta y} d\tau.$$

Daher wird offenbar

$$\lim_{\alpha \to -\infty} \int\limits_{\alpha + i\gamma}^{\alpha + i\beta} f(s)\, ds = 0. \tag{B}$$

Nunmehr führen wir den in Fig. 79 angedeuteten Integrationsweg $\mathfrak{L}_\varepsilon$ neu ein und betrachten

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_\varepsilon} f(s)\, ds.$$

z soll dabei auf derjenigen Seite des Weges liegen, der $s = 0$ nicht angehört. Zunächst ist ersichtlich, daß das Integral eine analytische Funktion von z darstellt[1]), deren Werte von der speziellen Wahl des Integrationsweges, d. h. von ε, unabhängig sind. Denn erstreckt man unser Integral über den in Fig. 80 angegebenen Weg, so kommt nach dem Hauptsatz der Funktionentheorie stets Null heraus. Geht man zur Grenze $\alpha \to \infty$ über, so werden ja nach (B) die Integrale über die vertikalen Stücke des Weges Null, und es stellt sich so tatsächlich die Unabhängigkeit vom Weg heraus. Auch erkennt man, daß das Integral eine analytische Funktion von z darstellt, die an allen nicht auf der negativen reellen Achse gelegenen Stellen

Fig. 78

Fig. 79.

1) Der Leser beweise das an Hand der S. 175 dargelegten Methode unter Verwendung der Abschätzung (A).

regular ist. Denn fur jede solche Stelle kann der Integrationsweg vorschriftsmäßig gewählt werden.

Wir wollen nun unser Integral ausrechnen. Zu dem Zwecke zerlegen wir L_ε in drei Teile, namlich die beiden horizontalen Strecken und den Halbkreis K_ε. Dann gehen wir zur Grenze $\varepsilon \to 0$ uber; wir wissen ja schon, daß durch Anderung von ε der Wert unseres Integrales nicht beeinflußt wird. Um nun schließen zu können, daß bei diesem Grenzübergang das Integral uber K_ε verschwindet, muß man $\Re(z) < 1$ annehmen. Dann wird namlich

Fig 80

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_\varepsilon} e^z s^{-z} ds \leqq \frac{e^\varepsilon \cdot \varepsilon^{-x} e^{y\frac{\pi}{2}} \cdot \varepsilon}{2} = \frac{e^\varepsilon \varepsilon^{1-x} e^{y\frac{\pi}{2}}}{2} \to 0.$$

Auch bei dem an den geradlinigen Integralen auszufuhrenden Grenzubergang erweist sich die Annahme $\Re(z) < 1$ als unentbehrlich. Betrachten wir namlich z B. nach (1)

$$\int_{-\infty+i\varepsilon}^{i\varepsilon} e^z s^{-z} ds = -\int_0^{-\infty} e^{i\varepsilon+\sigma}(\sigma + i\varepsilon)^{-z} e^{i\vartheta z} d\sigma = \int_0^{\infty} e^{-\sigma}(i\varepsilon - \sigma)^{-z} e^{i\varepsilon} e^{i\vartheta z} d\sigma,$$

so wird man versuchen, zu beweisen, daß fur $\varepsilon \to 0$ daraus

$$e^{-i\pi z}\int_0^{\infty} e^{-\sigma}\sigma^{-z} d\sigma$$

wird Schon fur die Konvergenz dieses letzteren Integrales ist aber $\Re(z) < 1$ zu fordern Sind nun die Grenzen des Integrales nicht Null und Unendlich, sondern zwei feste positive Zahlen δ und n, so ist leicht zu sehen, daß

$$\int_\delta^n e^{-\sigma}(i\varepsilon - \sigma)^{-z} e^{i\varepsilon} d\sigma \to e^{-i\pi z}\int_\delta^n e^{-\sigma}\sigma^{-z} d\sigma$$

Denn der Unterschied der Integranden strebt im Intervall $\delta \leqq \sigma \leqq n$ fur $\varepsilon \to 0$ gleichmaßig gegen Null. Nun aber kann man die Zahl n so wahlen, daß fur alle in Betracht kommenden ε stets

$$\int_n^{\infty} e^{-\sigma}(i\varepsilon - \sigma)^{-z} e^{i\varepsilon} d\sigma < \frac{\eta}{2}$$

bleibt, und man kann δ so wahlen, daß fur alle diese ε

$$\int_0^{\delta} e^{-\sigma}(i\varepsilon - \sigma)^{-z} e^{i\varepsilon} d\sigma < \frac{\eta}{2}$$

bleibt. Unter η wird dabei eine beliebig gegebene positive Zahl verstanden. Für diese letzte Abschätzung ist wieder die Voraussetzung $\mathfrak{R}(z) < 1$ wesentlich. Ebenso verfährt man mit dem anderen geradlinigen Integral. So findet man

$$\varphi(z) = \frac{e^{\pi i z}\int\limits_0^\infty e^{-\sigma}\sigma^{-z}\,d\sigma - e^{-\pi i z}\int\limits_0^\infty e^{-\sigma}\sigma^{-z}\,d\sigma}{2\pi i}$$

$$= \frac{1}{\pi}\sin \pi z\,\Gamma(1-z) = \frac{1}{\Gamma(z)}.$$

Also wird

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L e^s s^{-z}\,ds.$$

Allerdings wurde ja eben $\mathfrak{R}(z) < 1$ benutzt, die Gültigkeit der Darstellung also zunächst nur in diesem Bereiche erwiesen. Da aber das Integral in der vollen, längs der negativen reellen Achse aufgeschnittenen Ebene eine analytische Funktion darstellt, so muß es nach bekannten Sätzen über analytische Fortsetzung in diesem ganzen Bereich mit $\frac{1}{\Gamma(z)}$ übereinstimmen.

5324

Register.

Von Dr. L. Bieberbach, Prof. a. d. Univ. Berlin erscheinen ferner:

Lehrbuch der Funktionentheorie. II. Band: Moderne Funktionentheorie. Mit 44 Fig. i. T. [VII u. 366 S.] gr. 8. 1927. Geb *RM* 20.—

„Es ist nicht möglich, hier über den Reichtum des behandelten Stoffes und über die unzähligen Feinheiten in den Einzelheiten der Darstellung auch nur annähernd eine Idee zu geben; überdies besitzt das Buch einen Vorzug, der eben nur beim Studium desselben hervortritt, nämlich die lebhafte, stets fesselnde, leicht fließende und trotzdem im Großen und im Kleinen fein durchdachte Darstellung. Kurz ein schönes Buch, welches die beiden im Titel und im Untertitel desselben steckenden Versprechen, ein Lehrbuch und zugleich modern zu sein, in glücklichster Weise einlöst. Es werde noch bemerkt, daß das Buch auch dem Kenner viel Neues und Interessantes bringt und zwar nicht nur an Feinheiten im Kleinen und an Originalität der Einstellungen im Großen In der Tat enthält das Buch, zerstreut auf fast alle Abschnitte desselben, eine Reihe von bedeutenden, bisher unveröffentlichten persönlichen Beiträgen des Verfassers." (Acta Litterarum ac scientiarium.)

Funktionentheorie. Mit 34 Fig. i. T. [IV u. 118 S.] 8. 1922. (Techn. Leitf. Bd. 14.) Kart. *RM* 3.20

Differential- und Integralrechnung. (Mathemat. Leitf. Bd. 4 u. 5.)

I. Teil: Differentialrechnung. 3., verm u. verb. Aufl. Mit 34 Fig. [VI u. 142 S.] 8. 1928. Kart. *RM* 5 40

II Teil: Integralrechnung 3., verm. u. verb Aufl Mit 25 Fig. [VI u. 150 S] 8. 1928. Kart. *RM* 5.80

Analytische Geometrie. Mit 39 Fig i T. [IV u 120 S.] 8 1930 (Mathemat. Leitf Bd. 29.) Kart *RM* 6.60

Diese Einführung in die analytische Geometrie ist an Vektoranalysis und Matrizenkalkül orientiert [illegible] nach Möglichkeit dem geometrischen Objekt zu nähern [illegible], in die sie sich mit der Differential[illegible] mathematisches Denken

Projektive Geometrie. (Mathemat. Leitf Bd. 30) [In Vorb 1930]

Vorlesungen über Algebra. Unt. Benutzung der dritten Aufl des gleichnamigen Werkes von † Dr *G Bauer*. In 4., verm. Aufl. dargest von Dr *L Bieberbach*, Prof a d Univ Berlin Mit 16 Fig i T u auf 1 Taf [X u 334 S] gr. 8 1928 Geb. *RM* 20 —

„Bieberbach hat sich bei der Übernahme der Bearbeitung des bekannten Bauerschen Lehrbuchs die Aufgabe gestellt, das Buch zu modernisieren und es auf die Höhe zu bringen, die dem derzeitigen Entwicklungsstand der Algebra entspricht Dies hat zur Folge gehabt, daß manche Änderungen eingetreten sind, teils in der Anordnung, teils in der Darstellung des Stoffes teils in mannigfachen Zusätzen Im wesentlichen sollte aber das Buch seinen Charakter beibehalten, eine leichtfaßliche Einführung in das weite Reich der Algebra zu sein" (Deutsche Literaturzeitung.)

Die Determinanten. Von Geh. Hofrat Dr *E. Netto*, weil. Prof a. d Univ Gießen. 2., verb. Aufl., neubearb von Dr *L Bieberbach*, Prof. a d Univ Berlin. [VI u. 123 S] 8 1925 (Smlg. mathemat.-physikal. Lehrb Bd 9) Kart. *RM* 4 40

Zur Geschichte der Logik. Grundlagen und Aufbau der Wissenschaft im Urteil der mathematischen Denker Von Dr. *F. Enriques*, Prof. a. d. Univ Rom. Deutsch v. Dr. *L. Bieberbach*, Prof. a d. Univ Berlin. [V u 240 S.] 8. 1927. (Wissensch. u. Hyp. Bd. XXVI) Geb. *RM* 11.—

Mathematisches Wörterbuch. Hrsg. von Dr *L. Bieberbach* u. Dr. *R. v. Mises*, Proff. a. d. Univ Berlin. [In Vorb. 1930]

Dieses Wörterbuch will ein Hilfsmittel bei der mathematischen Lektüre sein und ein Nachschlagewerk für jeden, der rasche Auskunft über einen Begriff oder einen Satz sucht. Es will keine Sammlung von Monographien sein, sondern den Stoff auf recht viel Stichworte verteilen, dabei die Begriffe erklären, Sinn und Tragweite wichtiger Sätze erläutern.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Pascals Repertorium der höheren Mathematik. 2., völlig umgearb. Aufl. der deutschen Ausgabe. Unt. Mitw. zahlr. Mathematiker hrsg. von Dr. *E. Salkowski*, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Berlin, u. Dr. *H. E. Timerding*, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Braunschweig.

I. Band: Analysis. Hrsg. von *E. Salkowski*.

1. **Teilband: Algebra, Differential- und Integralrechnung.** [XV u. 527 S.] 8. 1910. Geb. *RM* 18.—

2. **Teilband: Differentialgleichungen, Funktionentheorie.** Mit 26 Fig. i. T. [XII u. S. 529—1023.] 8. 1927. Geb. *RM* 18.—

3. **Teilband: Reelle Funktionen, Neuere Entwicklungen, Zahlentheorie.** Mit 8 Fig. [XII u. 570 S.] 8. 1929. Geb. *RM* 22.—

II. Band. Geometrie. Hrsg. von *H. E. Timerding*.

1. **Teilband: Grundlagen und ebene Geometrie.** Mit 54 Fig. [XVIII u. 534 S.] 8. 1910. Geb. *RM* 18.—

2. **Teilband: Raumgeometrie.** Mit 12 Fig. i. T. [XII u. 628 S.] 8. 1922. Geh. *RM* 17.—, geb. *RM* 20.—

Höhere Algebra. Autorisierte deutsche Ausg. von *L. E. Dickson* „Modern algebraic theories". Hrsg. von *E. Bodewig*, Köln a. Rh. Mit 3 Fig. [VII u. 242 S.] 8. 1929. Geb. *RM* 14.—

Die Übersetzung des Dicksonschen Buches will gerade in Deutschland eine oft empfundene Lücke in der Lehrbuchliteratur ausfüllen, denn bisher fehlte besonders dem Studenten ein Buch, das eine wirklich klare und einfache, durch zahlreiche anregende Beispiele und Aufgaben erläuterte Darstellung wichtiger Theorien der Algebra, wie z. B. der Gruppentheorie, der Galoisschen Theorie, der Invariantentheorie und der Theorie der quadratischen Formen in den singulären Fällen bietet. Das didaktisch glänzend angelegte Buch wird daher besonders Lehrern und Studenten der Mathematik willkommen sein.

Lehrbuch der Combinatorik. Von Geh. Hofrat Dr. *E. Netto*, weil. Prof. a. d. Univ. Gießen. 2. Aufl. erweit. u. mit Anmerkungen versehen von *V. Brun*, Prof. a. d. Univ. Trondhjem (Norwegen), u. *Th. Skolem*, Doz. a. d. Univ. Oslo. [VIII u. 341 S.] gr. 8. 1927. (Teubn. mathemat. Lehrb. Bd. VII.) Geb. *RM* 14.—

Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Von Dr. *G. Kowalewski*, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Dresden. 4., verb. Aufl., vermehrt durch einen Anhang über Fredholmsche Determinanten und Integralgleichungen. Mit 31 Fig. i. T. [V u. 417 S.] 8. 1928. Geb. *RM* 16.—

Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure. Von Dr. *R. Rothe*, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Berlin. (Mathemat. Leitf. Bd. 21—23.)

I. Band: Differentialrechnung und Grundformeln der Integralrechnung nebst Anwendungen. 3. Aufl. Mit 155 Fig. i. T. [VII u. 189 S.] 8. 1930. Kart. *RM* 6.—

II. Band: Integralrechnung, Unendliche Reihen, Vektorrechnung nebst Anwendungen. Mit 96 Fig. i. T. [VIII u. 201 S.] 8. 1929. Kart. *RM* 6.40

III. Band: Raumkurven und Flächen, Linienintegrale und mehrfache Integrale, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen nebst Anwendungen. [In Vorb. 1930]

„Auf die Bedürfnisse der angewandten Mathematik ist weitgehend Rücksicht genommen, [illegible] ist der zahlenmäßigen D[illegible] stets ganz besondere Aufmerksamkeit [illegible]. Viel Stoff ist in die sehr [illegible] ausgewählten Aufgaben verteilt, deren [illegible] dem Leser von größtem Nutzen sein wird. Das Buch kann Studierenden der reinen und der angewandten Mathematik warm empfohlen werden."

(Prof. Dr. L. von Schrutka, Wien.)

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin